

تمرین بعد از کلاس

به سبک استاد علی داودوندی رتبه ۶۱ کنکور



در هر قسمت ابتدا ۱ دقیقه خودتان فکر کنید اگه نتوانستید حل کنید ۱ دقیقه به کمک جزوه سوال را حل کنید و اگر باز هم نتوانستید در ۱ دقیقه پاسخنامه را بررسی کرده و سپس مسیر حل را به خودتان توضیح دهید. حل ویدیویی تمرین ها در آپارات و یوتیوب قرار گرفته است و به کمک **تایم لاین** می توانید هر سوال را پیدا کنید و حل آن را مشاهده کنید

 ALIDAVOODVANDI.IR

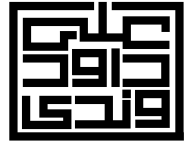
 [ALI.DAVOODVANDI](https://www.instagram.com/ALI.DAVOODVANDI)

 [ALI_DAVOODVANDI](https://www.youtube.com/ALI_DAVOODVANDI)

 [ALI_DAVOODVANDI](https://www.youtube.com/ALI_DAVOODVANDI)

 ۰۹۳۸۳۱۶۵۳۵۴

 [ALI_DAVOODVANDI](https://www.telegram.me/ALI_DAVOODVANDI)



گزینه ۲

۱

$$\frac{x^2 - 5x}{x^2 - 4} - 3 = \frac{x^2 - 5x - 3x^2 + 12}{x^2 - 4} = \frac{x + 3}{2 - x}$$

$$\Rightarrow \frac{-2x^2 - 5x + 12}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+3}{-(x-2)}$$

$$\Rightarrow -2x^2 - 5x + 12 = -(x+3)(x+2)$$

$$\Rightarrow -2x^2 - 5x + 12 = -(x^2 + 5x + 6) = -x^2 - 5x - 6$$

$$\Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = \pm\sqrt{18}$$

گزینه ۱

۲

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 2x} - 1 = \frac{x^2 - 2x + 3 - (x^2 - 2x)}{x^2 - 2x}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{x^2} - \cancel{2x} + 3 - \cancel{x^2} + \cancel{2x}}{x^2 - 2x} = \frac{3}{x - 2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{x^2 - 2x} = \frac{3}{x - 2} \Rightarrow x(x^2 - 2x) = 3(x - 2)$$

$$\Rightarrow 3(\cancel{x-2}) = x^2(\cancel{x-2}) \Rightarrow x^2 = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد.

گزینه ۲

۳

$$\sqrt{2x+5} = 2x+5 \Rightarrow 2x+5=0 \text{ یا } ۱$$

در نتیجه $x = \frac{-5}{2}$ یا $x = -2$ ، پس دو ریشه منفی دارد.

$$\frac{1}{n-4} - \frac{1}{n} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{n-n+4}{n^2-4n} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{n^2-4n} = \frac{1}{3} \Rightarrow n^2-4n-12=0 \Rightarrow (n+2)(n-6)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n=-2 \\ n=6 \end{cases} \times \xrightarrow{\text{تقسیم نصف کیک}} \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

اولین شرط روی a نشان می‌دهد که $a \geq 0$ پس:

$$\sqrt{x-a} = a - \sqrt{x} \Rightarrow x-a = a^2 + x - 2a\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow 2a\sqrt{x} = a^2 + a \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{a^2+a}{2a} \Rightarrow x = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2$$

پس لازم است $a+1$ زوج باشد تا x صحیح به دست آید یعنی:

$$a = 1, 3, 5, 7, 9$$

اما دقت شود که $a=0$ نیز جواب است زیرا:

$$a=0 \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x=0$$

پس برای ۶ مقدار صحیح a معادله جواب صحیح دارد.

$$\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x-3} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x-3} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x-3-2(x-2)-(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x-3-2x+4-x^2+2x+5x-6}{(x-2)(x-3)} = 0$$

$$\Rightarrow -x^2+4x-5=0 \Rightarrow x^2-4x+5=0$$

$$\Delta = b^2-4ac \Rightarrow 16-4(1)(5) = 16-20 = -4 < 0$$

چون $\Delta < 0$ ، معادله جواب ندارد.

$$x = \sqrt{3+x} \Rightarrow x^2 = 3+x \Rightarrow x^2-x-3=0 \xrightarrow{x>0} x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

برای معادله به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{(1-x)^2 + x^2}{x^2(1-x)^2} = \frac{160}{9} \Rightarrow \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x - x^2)^2} = \frac{160}{9}$$

فرض می‌کنیم $x^2 - x = t$ ، پس:

$$\frac{2t + 1}{t^2} = \frac{160}{9} \Rightarrow 160t^2 = 18t + 9 \Rightarrow 160t^2 - 18t - 9 = 0$$

t را به دست می‌آوریم:

$$t = \frac{9 \pm \sqrt{11 + 1440}}{160} = \frac{9 \pm 39}{160}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{3}{16} \Rightarrow x^2 - x + \frac{3}{16} = 0 \Rightarrow S_1 = 1 \\ t = \frac{3}{10} \Rightarrow x^2 - x - \frac{3}{10} = 0 \Rightarrow S_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow S = S_1 + S_2 = 1 + 1 = 2$$

دقت شود Δ هر دو معادله مثبت است و جواب دارد.

اگر مدت زمان پر شدن استخر توسط شیر B برابر x باشد پس برای A برابر $x + 15$ است پس:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+15} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2x+15}{x^2+15x} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x^2 + 15x = 4x + 60 \Rightarrow x^2 + 11x - 60 = 0$$

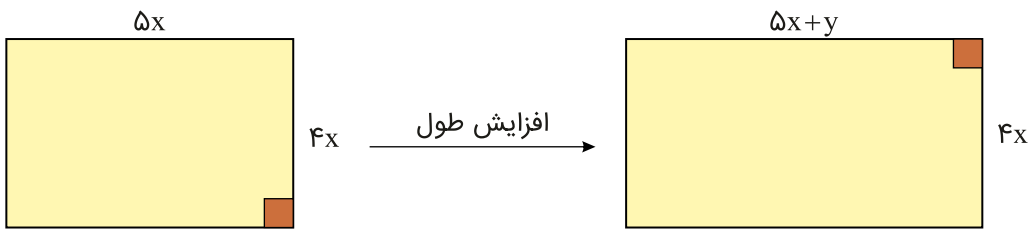
$$(x+12)(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -12 \end{cases} \times$$

یعنی شیر A در مدت ۲۰ ساعت استخر را پر می‌کند و شیر B در مدت ۵ ساعت. حال اگر n شیر از مدل A اضافه کنیم، پس:

$$\frac{n+1}{20} + \frac{1}{5} = 1 \Rightarrow \frac{n+1}{20} = \frac{4}{5} \Rightarrow n+1 = 16 \Rightarrow n = 15$$

بنابراین ۱۵ شیر از نوع A باید اضافه کنیم.

عدد طلایی $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است.



$$\frac{\omega x + y}{۴x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \omega x + y = ۲x(1 + \sqrt{5})$$

پس طول مستطیل طلایی را می‌توان $۲x(1 + \sqrt{5})$ در نظر گرفت:

$$\frac{S_۲}{S_1} = \frac{(۴x)(۲x(1 + \sqrt{5}))}{(۴x)(\omega x)} = \frac{۲(1 + \sqrt{5})}{\omega} = ۵/۴(1 + \sqrt{5})$$

راه حل اول:

$$\frac{1}{x^r} + \frac{1}{(r-x)^r} = \frac{f_0}{q} \Rightarrow \frac{(r-x)^r + x^r}{x^r(r-x)^r} = \frac{f_0}{q} \Rightarrow \frac{rx^r - rx + r}{x^r(r-x)^r} = \frac{f_0}{q}$$

$$f_0 x^r (x-r)^r - \lambda x(x-r) - r f_0 = 0 \xrightarrow{x(x-r)=t} f_0 t^r - \lambda t - r f_0 = 0$$

$$\Rightarrow t_{1,r} = \frac{\lambda \pm \sqrt{(\lambda)^2 - f_0(f_0)(-r f_0)}}{\lambda_0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{\lambda + \sqrt{f_0 \lambda f_0}}{\lambda_0} = \frac{\lambda + r \lambda}{\lambda_0} = \frac{q f_0}{\lambda_0} = \frac{f_0}{\omega} \\ t_r = \frac{\lambda - \sqrt{f_0 \lambda f_0}}{\lambda_0} = \frac{\lambda - r \lambda}{\lambda_0} = -\frac{f_0}{\lambda_0} = -\frac{r}{f_0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{f_0}{\omega} \Rightarrow x(x-r) = \frac{f_0}{\omega} \Rightarrow x^r - rx - \frac{f_0}{\omega} = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} S_1 = r \\ t_r = -\frac{r}{f_0} \Rightarrow x(x-r) = -\frac{r}{f_0} \Rightarrow x^r - rx + \frac{r}{f_0} = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} S_r = r \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = S_1 + S_r = f_0$$

راه حل دوم:

$$\frac{1}{x^r} + \frac{1}{(r-x)^r} = \frac{f_0}{q} \Rightarrow \frac{(r-x)^r + x^r}{(rx - x^r)^r} = \frac{f_0}{q}$$

$$\Rightarrow \frac{f_0 + rx^r - rx}{(rx - x^r)^r} = \frac{f_0}{q} \Rightarrow \frac{f_0 - r(rx - x^r)}{(rx - x^r)^r} = \frac{f_0}{q}$$

$$\xrightarrow{t=(rx-x^r)} \frac{f_0 - rt}{t^r} = \frac{f_0}{q} \Rightarrow r_0 t^r + q t - \lambda = 0 \Rightarrow t = \frac{-q \pm \sqrt{1521}}{f_0} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{r}{f_0} \\ t = -\frac{f_0}{\omega} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} rx - x^r = \frac{r}{f_0} \Rightarrow x^r - rx + \frac{r}{f_0} = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} S_1 = r \\ rx - x^r = -\frac{f_0}{\omega} \Rightarrow x^r - rx - \frac{f_0}{\omega} = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} S_r = r \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = S_1 + S_r = f_0$$

بنابراین مجموع ۴ ریشه برابر با ۴ است.

اولاً دقت شود هر ۵۰ دقیقه برابر $\frac{۵۰}{۶۰}$ یعنی $\frac{۵}{۶}$ ساعت است. اگر سرعت خودرو در حالت اول v_1 باشد زمان طی مسیر ۲۰۰ کیلومتری برابر $\frac{۲۰۰}{v_1}$ می‌شود اگر از سرعت ۲۰ کیلومتر بر ساعت کم شود یعنی $v_1 - ۲۰$ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{۲۰۰}{v_1 - ۲۰} &= \frac{۲۰۰}{v_1} + \frac{۵}{۶} \Rightarrow \frac{۲۰۰}{v_1 - ۲۰} = \frac{۱۲۰۰ + ۵v_1}{۶v_1} \\ \Rightarrow ۱۲۰۰v_1 &= ۱۲۰۰v_1 - ۲۴۰۰۰ + ۵v_1^2 - ۱۰۰v_1 \\ ۵v_1^2 - ۱۰۰v_1 - ۲۴۰۰۰ &= ۰ \Rightarrow v_1^2 - ۲۰v_1 - ۴۸۰۰ = ۰ \\ \Rightarrow \begin{cases} \Delta' = ۱۰۰ + ۴۸۰۰ = ۴۹۰۰ \\ v_1 = \frac{۱۰ \pm ۷۰}{۱} \Rightarrow v_1 = ۸۰, v_2 = ۶۰ \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{۸۰}{۶۰} = \frac{۴}{۳} \end{cases} \end{aligned}$$

از دلتای معمولی هم می‌توان استفاده کرد فقط محاسبات کمی بیشتر می‌شود.

$$\begin{aligned} \frac{x-۲}{(x-۲)(۲x-۱)} - \frac{x-۳}{(x-۳)(۳x-۱)} &= \frac{۲}{۱۵} \Rightarrow \frac{۱}{۲x-۱} - \frac{۱}{۳x-۱} = \frac{۲}{۱۵} \\ \Rightarrow \frac{۳x-۱-۲x+۱}{(۲x-۱)(۳x-۱)} &= \frac{۲}{۱۵} \Rightarrow ۲(۶x^2 - ۵x + ۱) = ۱۵x \Rightarrow ۱۲x^2 - ۲۵x + ۲ = ۰ \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (x-۲)(۱۲x-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۲ & \text{غیرقابل قبول} \\ x=\frac{1}{12} & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

$$۱۴۴x^2 = ۱۴۴ \times \frac{1}{۱۴۴} = ۱$$

$$۳x^2 - ۵x + ۱ = t \geq ۰$$

$$t = \sqrt{t+۶} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} t^2 = t + ۶ \Rightarrow t^2 - t - ۶ = ۰$$

$$\begin{cases} t=۳ \Rightarrow ۳x^2 - ۵x + ۱ = ۳ \Rightarrow ۳x^2 - ۵x - ۲ = ۰ \\ t=-۲ \Rightarrow \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

$$۳x^2 - ۵x - ۲ = ۰ \Rightarrow |x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{\Delta}}{۴a} \text{ یا } \sqrt{S^2 - ۴P}$$

$$S = \frac{۵}{۳}, P = -\frac{۲}{۳} \Rightarrow \sqrt{\frac{۲۵}{۹} + \frac{۸}{۳}} = \sqrt{\frac{۴۹}{۹}} = \frac{۷}{۳}$$

$$\frac{x^2 - 2x + 4 - x^2 + 9x + 2}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{6x}{x^2 - 2x + 4} \Rightarrow \frac{7x+6}{x+2} = 6x \Rightarrow 6x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{12} = \frac{-5 \pm 13}{12} \quad \text{یک جواب مثبت}$$

در سمت چپ مخرج مشترک می‌گیریم.

$$\frac{2\sqrt{2-x}}{-x-2} = \frac{2-x}{5\sqrt{2-x}}$$

با طرفین وسطین داریم:

$$10(2-x) = (2-x)(-x-2)$$

$2-x$ را خط می‌زنیم و جواب $x=2$ حاصل می‌شود، اما چون ریشه مخرج معادله اولیه است آن را نمی‌پذیریم.

$$-x-2=10 \Rightarrow x=-12$$

هیچ جواب مثبتی در کار نیست.

دامنه معادله فقط $x=2$ است، بنابراین جواب معادله یا $x=2$ است و یا اینکه جواب حقیقی ندارد. $x=2$ را امتحان می‌کنیم:

$$x=2 \Rightarrow \sqrt{4-3} = \sqrt{2+0} - \sqrt{2-2} \Rightarrow 1 = \sqrt{2}$$

پس $x=2$ جواب معادله نیست و در نتیجه معادله جواب حقیقی ندارد.

$x=3$ جواب معادله است، پس در معادله به جای x ، مقدار ۳ را قرار می‌دهیم. داریم:

$$\frac{x-2}{ax-5} = \frac{a+2}{x-1} - 1 \xrightarrow{x=3} \frac{1}{3a-5} = \frac{a+2}{2} - 1 \Rightarrow \frac{1}{3a-5} = \frac{a+2-2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3a-5} = \frac{a}{2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 3a^2 - 5a = 2$$

$$\Rightarrow 3a^2 - 5a - 2 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (a-2)(3a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

فرض کنید هر روز n صفحه را مطالعه کند و x روز طول بکشد.

$$n \times x = ۱۲۰ \Rightarrow x = \frac{۱۲۰}{n}$$

$$(n + ۱۲)(x - ۵) = ۱۲۰$$

در رابطه دوم جایگذاری می‌کنیم که $x = \frac{۱۲۰}{n}$:

$$(n + ۱۲)\left(\frac{۱۲۰}{n} - ۵\right) = ۱۲۰ \Rightarrow ۱۲۰ + \frac{۱۴۴۰}{n} - ۶۰ - ۵n = ۱۲۰$$

$$\Rightarrow \frac{۱۴۴۰}{n} - ۵n = ۶۰ \xrightarrow{\times \frac{n}{۵}} ۲۸۸ - n^۲ = ۱۲n \Rightarrow n^۲ + ۱۲n - ۲۸۸ = ۰$$

$$\Rightarrow (n + ۲۴)(n - ۱۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} n = -۲۴ \times \\ n = ۱۲ \checkmark \end{cases} \Rightarrow x = ۱۰$$

اگر سرعت موتورسیکلت را x فرض کنیم، فاصله را در زمان $\frac{۳۶۰}{x}$ طی می‌کند. پس سرعت ماشین $x + ۱۰$ است که فاصله را در زمان $\frac{۳۶۰}{x + ۱۰}$ طی می‌کند و ۲۴ دقیقه یا $\frac{۲}{۵}$ ساعت زودتر به مقصد می‌رسد.

$$\frac{۳۶۰}{x} - \frac{۳۶۰}{x + ۱۰} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow \frac{۳۶۰x + ۳۶۰۰ - ۳۶۰x}{x(x + ۱۰)} = \frac{۲}{۵}$$

$$\frac{۱۸۰۰}{x^۲ + ۱۰x} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow x^۲ + ۱۰x - ۹۰۰۰ = ۰ \Rightarrow (x + ۱۰۰)(x - ۹۰) = ۰ \Rightarrow x = ۹۰$$

سرعت ماشین برابر $۱۰۰ = x + ۱۰$ کیلومتر بر ساعت است.

$$\frac{۱}{t_۱} + \frac{۱}{t_۲} = \frac{۱}{۴}$$

$$t_۲ = t_۱ + ۱۵ : \frac{۱}{t_۱} + \frac{۱}{t_۱ + ۱۵} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow ۴t_۱(t_۱ + ۱۵)\left(\frac{۱}{t_۱} + \frac{۱}{t_۱ + ۱۵} = \frac{۱}{۴}\right)$$

$$\Rightarrow ۴(t_۱ + ۱۵) + ۴t_۱ = t_۱(t_۱ + ۱۵) \Rightarrow ۴t_۱ + ۶۰ + ۴t_۱ = t_۱^۲ + ۱۵t_۱ \Rightarrow t_۱^۲ + ۷t_۱ - ۶۰ = ۰$$

$$\Rightarrow (t_۱ + ۱۲)(t_۱ - ۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = -۱۲ \text{ غ ق} \\ t_۱ = ۵ \text{ ق ق} \end{cases}$$

چون $x = 2$ جواب معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$\frac{\frac{1}{2}mx - 1}{(x-1)^2} - \frac{mx - 6}{x^2 - 2x - 3} = \frac{1}{x^2 - 1} \xrightarrow{x=2} \frac{m-1}{1} - \frac{2m-6}{-3} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow m-1 + \frac{2m-6}{3} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\times 3} 3m-3+2m-6=1$$

$$\Rightarrow 5m=10 \Rightarrow m=2$$

زمان $(t) \times$ سرعت $(v) =$ مسافت (x)

$$\begin{cases} \text{رفت: } 4 = v \times t_{\text{رفت}} \\ \text{برگشت: } 4 = (v+1) \times t_{\text{برگشت}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_{\text{رفت}} = \frac{4}{v} \\ t_{\text{برگشت}} = \frac{4}{v+1} \end{cases}$$

$$t_{\text{رفت}} + t_{\text{برگشت}} = 6 \text{ ساعت} \Rightarrow \frac{4}{v} + \frac{4}{v+1} = 6$$

$$\Rightarrow 4\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v+1}\right) = 6 \Rightarrow 2\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v+1}\right) = 3$$

$$\Rightarrow 2(v+1+v) = 3v(v+1) \Rightarrow 3v^2 - v - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(3)(-2) = 25$$

$$v = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow v = \frac{1 \pm 5}{6} \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{1+5}{6} = 1 \checkmark \\ v = \frac{1-5}{6} = -\frac{4}{6} \times \end{cases} \Rightarrow v = 1 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

در مسیر رفت و برگشت، به خاطر حرکت آب رودخانه به اندازه سرعت آب (v) از سرعت قایق کم و به آن اضافه می‌شود، پس زمان رفت $\frac{1200}{100+v}$ و زمان برگشت $\frac{1200}{100-v}$ است و اختلاف آن‌ها باید ۵ باشد.

$$\frac{1200}{100-v} - \frac{1200}{100+v} = 5 \xrightarrow{\div 5} 240\left(\frac{1}{100-v} - \frac{1}{100+v}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{240 \times 2v}{(100-v)(100+v)} = 1 \Rightarrow 100^2 - v^2 = 480v$$

$$\Rightarrow v^2 + 480v - 10000 = 0 \Rightarrow (v-20)(v+500) = 0 \xrightarrow{v>0} v = 20$$

فرض کنید سرعت پرواز پرونده v باشد. در این صورت سرعت رفت $v + 5$ و سرعت برگشت $v - 5$ خواهد بود و داریم:

$$t_1 = \frac{x_1}{v_1} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{5 + v}$$

$$t_2 = \frac{x_2}{v_2} \Rightarrow t_2 = \frac{1}{v - 5}$$

$$t_1 + t_2 = 9 \text{ (min)} = \frac{9}{60} \text{ (h)} \Rightarrow \frac{9}{60} = \frac{1}{5 + v} + \frac{1}{v - 5}$$

$$\frac{3}{20} = \frac{1}{5 + v} + \frac{1}{v - 5} \xrightarrow{\times 20(v^2 - 25)} 3(v^2 - 25) = 20(v - 5) + 20(v + 5)$$

$$\Rightarrow 3v^2 - 75 = 20v - 100 + 20v + 100$$

$$\Rightarrow 3v^2 - 40v - 75 = 0 \Rightarrow (3v + 5)(v - 15) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v = 15 & \checkmark \\ v = -\frac{5}{3} & \times \end{cases}$$

معادله داده شده را طرفین وسطین می کنیم، معادله درجه دوم می سازیم و دلتای آن را بزرگتر از صفر قرار می دهیم.

$$\frac{x^2 - a}{x + 3} = 2x - 1 \Rightarrow (x + 3)(2x - 1) = x^2 - a$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x + 6x - 3 = x^2 - a \Rightarrow x^2 + 5x + a - 3 = 0$$

$$\Delta = (5)^2 - 4(1)(a - 3) > 0 \Rightarrow 25 - 4a + 12 > 0$$

$$\Rightarrow 4a < 37 \Rightarrow a < \frac{37}{4}$$

دقت کنید که به ازای $a = 9$ معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{x^2 - 9}{x + 3} = 2x - 1 \Rightarrow \frac{(x - 3)(x + 3)}{x + 3} = 2x - 1 \Rightarrow x - 3 = 2x - 1 \Rightarrow x = -2$$

ملاحظه می کنید که به ازای $a = 9$ معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز نمی باشد، پس جواب کامل این سوال $a \neq 9, a < \frac{37}{4}$ است. با این شرایط محدوده مشخص شده در گزینه "۱" می تواند محدوده تغییرات a باشد.

وزن نقره در گلدان اولیه را n و وزن مس را m در نظر می‌گیریم.

$$\frac{n}{m} = \lambda \Rightarrow n = \lambda m$$

وزن گلدان جدید پس از اضافه شدن ۱۰۰ گرم مس به صورت زیر به دست می‌آید:

$$n + m + 100 = \lambda m + m + 100 = 9m + 100$$

با استفاده از عبارت " $\frac{4}{5}$ وزن گلدان جدید، نقره می‌باشد" معادله را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \frac{4}{5}(9m + 100) = n &\Rightarrow 4(9m + 100) = 5n \Rightarrow 4(9m + 100) = 5(\lambda m) \\ \Rightarrow 36m + 400 &= 5\lambda m \Rightarrow 5\lambda m - 36m = 400 \Rightarrow 4m = 400 \Rightarrow m = 100 \end{aligned}$$

وزن مس در گلدان اولیه $m = 100$ و وزن نقره $n = \lambda m = 800$ بوده است. بنابراین وزن گلدان اولیه $800 + 100$ یعنی ۹۰۰ گرم بوده است.

$$-mx^2 + mx + 1 = -m - x \Rightarrow mx^2 - (1+m)x - m - 1 = 0$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow (1+m)^2 + 4m(m+1) < 0 \Rightarrow (1+m)(1+5m) < 0$$

$$\Rightarrow -1 < m < -\frac{1}{5} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} \text{هیچ مقدار}$$

$$\frac{-x^2 + x - 8}{x^2 - x - 6} < 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x^2 + x - 8 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4(-1)(-8) < 0 \Rightarrow \text{ریشه ندارد} (*) \\ x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)} a < 0 \Rightarrow \text{همواره منفی}$$

x		-2		3	
$-x^2 + x - 8$	-	-	-	-	-
$x^2 - x - 6$	+	o	-	o	+
y	-	ت	+	ت	-

جدول مربوط به یک عبارت درجه یک است، پس $a = -۳$ است.

$$f(x) = (a + ۳)x^۲ + ax + b \xrightarrow{a=-۳} f(x) = -۳x + b$$

از طرفی باتوجه به جدول $f(b + ۱) = ۰$ است.

$$-۳(b + ۱) + b = -۲b - ۳ = ۰ \Rightarrow b = \frac{-۳}{۲}$$

بنابراین $f(x) = -۳x - \frac{۳}{۲}$. حالا $f(b) = f(\frac{-۳}{۲})$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(b) = f(\frac{-۳}{۲}) = -۳(\frac{-۳}{۲}) - \frac{۳}{۲} = \frac{۹}{۲} - \frac{۳}{۲} = ۳$$

می‌دانیم که برای حل نامعادله باید تعیین علامت کنیم. پس:

$$(-۳x^۲ + ax + b)(x + ۱) \geq ۰ \Rightarrow \begin{cases} x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \\ -۳x^۲ + ax + b = ۰ \end{cases}$$

باتوجه به اینکه مجموعه جواب نامعادله به صورت بازه $(-\infty, ۴]$ و یکی از ریشه‌های نامعادله، -۱ است، باید نامعادله در $x = -۱$ ریشه مضاعف داشته باشد و جدول تعیین علامت باید به صورت زیر باشد:

	-۱		۴	
+		+		-

یعنی ۴ و -۱ ریشه‌های $-۳x^۲ + ax + b$ هستند.

$$\Rightarrow \begin{cases} -۳(-۱)^۲ + a(-۱) + b = ۰ \Rightarrow -۳ - a + b = ۰ \Rightarrow b - a = ۳ \\ -۳(۴)^۲ + ۴a + b = ۰ \Rightarrow -۴۸ + ۴a + b = ۰ \Rightarrow b + ۴a = ۴۸ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = ۹, b = ۱۲ \Rightarrow a - b = -۳$$

$$A = \frac{f(x)(f'(x) - 3f(x) + 5)}{x(x-3)(x-1)}$$

عبارت $f'(x) - 3f(x) + 5$ همواره مثبت است، زیرا:

$$\begin{cases} \Delta = 9 - 20 < 0 \\ a = 1 > 0 \end{cases}$$

حال جدول تعیین علامت را برای A رسم می‌کنیم:

x	$-\infty$	$-\infty$	-3	0	1	3	$+\infty$	
$f(x)$	+	o	-	o	+	o	-	+
$x^3 - 4x^2 + 3x$	-	-	-	o	+	o	-	+
A	-	o	+	o	-	o	+	+

$$\Rightarrow A > 0 \Rightarrow (-\infty, -3) \cup (0, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$$

از جدول تعیین علامت $p(x)$ معلوم می‌شود که صورت کسر $1 - \frac{ax+4}{3x-1} = p(x)$ فاقد ریشه است:

$$p(x) = \frac{ax+4}{3x-1} - 1 = \frac{ax+4-3x+1}{3x-1} = \frac{(a-3)x+5}{3x-1}$$

برای این که صورت کسر ریشه نداشته باشد، باید $a-3=0$ یعنی $a=3$ باشد. پس b ریشه مخرج است، یعنی $b = \frac{1}{3}$:

$$ab = 3 \times \frac{1}{3} = 1$$

جعبه ابزار:

۱) عبارتی که توان زوج داشته باشد همواره نامنفی است.

۲) قدرمطلق همواره نامنفی است.

$$p = (x^2 - x)(x - 1)^2 |x - 2|$$

$$\Rightarrow p = x(x - 1)^2 |x - 2|$$

ریشه‌ها = ۰, ۱, ۲

x	$-\infty$	۰	۱	۲	$+\infty$
x	-	○	+	+	+
$(x-1)^2$	+	+	○	+	+
$ x-2 $	+	+	+	○	+
p	-	○	+	○	+

جعبه ابزار: ۱ و $x_1 = 1$ و $x_2 = 2$ ریشه‌های معادله $x^2 + ax + b = 0$ هستند.

۱ و $x_1 = 1$ و $x_2 = 2$ ریشه‌های معادله $x^2 + ax + b = 0$ می‌باشند، پس در معادله صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} 1 + a + b = 0 \\ 4 + 2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 - 2a - 2b = 0 \\ 4 + 2a + b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = 2, a = -3 \Rightarrow a^2 b = 18$$

عبارت $x^2 + 1$ همواره مثبت است، پس در جدول تعیین علامت تاثیری ندارد:

$$-2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}, \quad x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	1	$\frac{3}{2}$	
$-2x+3$	+	+	o -
$x-1$	-	o +	+
A	-	o +	o -

A در بازه $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ نامنفی است. دقت کنید که A در بازه $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ مثبت است.

تعیین علامت می‌کنیم:

X	$-\infty$	-۲	-۱	۱	۲	$+\infty$	
$(X+1)^۲$	+	+	o	+	+	+	
$(X-1)^۳$	-	-	-	o	+	+	
$X+۲$	-	o	+	+	+	+	
$(X-۲)^۵$	-	-	-	-	o	+	
y	-	o	+	o	+	o	+

در سه نقطه $x = -2$ و $x = 1$ و $x = 2$ تغییر علامت می‌دهد.

از جدول تعیین علامت $ax + b$ دو نتیجه می‌گیریم:

اولاً علامت ضریب x (شیب خط)، یعنی a منفی است (یعنی $a < 0$) و ثانیاً ریشه عبارت $ax + b$ برابر -2 است، پس داریم:

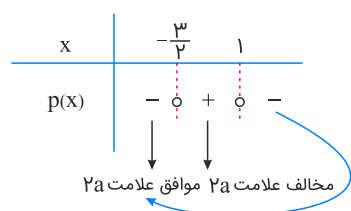
$$ax + b \xrightarrow{x=-2} -2a + b = 0 \Rightarrow 2a = b$$

با جایگذاری $b = 2a$ ، $p(x)$ به صورت زیر درمی‌آید، داریم:

$$p(x) = bx^2 + ax - 3a \xrightarrow{b=2a} 2ax^2 + ax - 3a = a(2x^2 + x - 3)$$

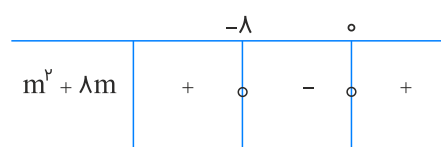
$$= a(x-1)(2x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

حال با معلوم بودن ریشه‌های عبارت درجه دوم و علامت ضریب x^2 (یعنی علامت $2a$ که منفی است)، جدول تعیین علامت $p(x)$ را رسم می‌کنیم، داریم:



وقتی $0 < \Delta$ باشد، آنگاه معادله جواب حقیقی ندارد، پس:

$$(-m)^2 - 4(2)(-m) < 0 \Rightarrow m^2 + 8m < 0 \Rightarrow m(m+8) < 0$$



$$\Rightarrow -8 < m < 0$$

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{x^2(x+1) - (x+1)}{(x+1)(x-3)} \\
 &= \frac{(x+1)(x^2-1)}{(x+1)(x-3)} = \frac{(x+1)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-3)} \\
 &\xrightarrow{x \neq -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-3)}
 \end{aligned}$$

عبارت P در $x = 3$ و $x = -1$ تعریف نشده است.

x	-1	1	3
$x^2 - 1$	$+$	0	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	0
P	$-$	$+$	$+$

ملاحظه می‌شود که در سه نقطه عبارت P تغییر علامت می‌دهد.

ریشهٔ مخرج در جدول تعیین علامت، تعریف نشده است، پس $\frac{1}{x}$ ریشهٔ مخرج است:

$$2x - c = 0 \Rightarrow x = \frac{c}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 1$$

$x^2 - a^2$ دارای دو ریشهٔ قرینه است. در جدول ۲ و ۲- قرینه هستند:

$$x^2 - a^2 = 0 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a \Rightarrow a = \pm 2$$

ریشهٔ دیگر $x = -3$ است، که باید ریشهٔ صورت باشد:

$$\begin{aligned}
 (x - b)^2 &= 0 \Rightarrow x = b = -3 \\
 \Rightarrow a^2 - bc &= (\pm 2)^2 - (-3)(1) = 4 + 3 = 7
 \end{aligned}$$

ریشهٔ مخرج در جدول تعیین علامت، تعریف نشده است، یعنی (-۲) ریشهٔ مخرج است:

$$(x + c)^۲ = ۰ \Rightarrow x = -c = -۲ \Rightarrow c = ۲$$

$x^۲ - b^۲$ دارای دو ریشهٔ قرینه است:

$$\Rightarrow x^۲ - b^۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ = b^۲ \Rightarrow x = \pm b \Rightarrow b = \pm\sqrt{۲}$$

ریشهٔ دیگر $x = ۱$ است که باید ریشهٔ صورت باشد:

$$۲x + a = ۰ \Rightarrow ۲x = -a \Rightarrow x = \frac{-a}{۲} = ۱ \Rightarrow a = -۲$$

$$ab^۲ + c = (-۲)(\underbrace{\pm\sqrt{۲}}_۲)^۲ + ۲ = -۴ + ۲ = -۲$$

باتوجه به جدول تعیین علامت، عبارت p یک عبارت درجهٔ دوم همواره نامنفی است، پس ریشهٔ مضاعف ۳ دارد:

$$\begin{cases} y = (x - ۳)^۲ = x^۲ - ۶x + ۹ \\ y = x^۲ + ax - b \end{cases} \Rightarrow a = -۶, b = -۹$$

$$a + b = -۶ - ۹ = -۱۵$$

طبق تعریق کتاب درسی، عبارت $a^{\frac{1}{n}}$ به ازای $n \in \mathbb{N}, n \geq ۲$ و $a > ۰$ تعریف می‌شود.

$$\frac{۱-x}{۱+x} > ۰$$

x	$-\infty$	-۱	۱	$+\infty$
$۱-x$	+	+	۰	-
$x+۱$	-	۰	+	+
$\frac{۱-x}{x+۱}$	-	۰	+	-

$$\Rightarrow -۱ < x < ۱$$

برای اینکه معادله درجه دوم، دو جواب حقیقی و متمایز داشته باشد، می‌بایست Δ معادله مثبت باشد، داریم:

$$ax^2 + 2x + \frac{a}{4} = 0 \xrightarrow[\text{مقایسه با فرم استاندارد } a'x^2 + b'x + c' = 0]{\text{مقایسه با فرم استاندارد}} \begin{cases} a' = a \\ b' = 2 \\ c' = \frac{a}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta = b'^2 - 4a'c' = 4 - 4(a)\left(\frac{a}{4}\right) = 4 - a^2 > 0 \Rightarrow -2 < a < 2$$

باتوجه به اینکه معادله داده شده درجه دوم است، پس $a \neq 0$ می‌باشد. درنتیجه مجموعه مقادیر a برابر است با:

$$(-2, 2) - \{0\}$$

روش اول: با امتحان کردن گزینه‌ها به عدد $\frac{1}{3}$ می‌رسیم:

$$m = \frac{1}{3} \Rightarrow p(x) = \frac{-4(x+3)(2x-3)^2}{9(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}$$

x	۰	۱	$\frac{3}{2}$	۴	$+\infty$
p(x)	///	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$	$+\frac{1}{3}$	$-\infty$

روش دوم: عبارت موردنظر را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{((m^2-1)x^2 - 4mx + 4)(2x-3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \geq 0$$

حال بدون در نظر گرفتن عبارت $(m^2-1)x^2 - 4mx + 4$ تعیین علامت می‌کنیم:

x	۰	۱	$\frac{3}{2}$	۴	$+\infty$
p(x)	///	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$

اگر به ازای مقادیر گفته شده برای m تعیین علامت انجام دهیم، فقط برای $m = \frac{1}{3}$ مجموعه جواب نامعادله به صورت بازه $(1, 4)$ است.

پراتنز دوم صورت را با اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{((m^2 - 1)x^2 - 4mx + 4)(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)}{2x - 3} > 0$$

دو عبارت $\sqrt{x} - 1$ و $2x - 3$ ، به ازای $x > \frac{3}{2}$ ، مثبت‌اند، پس می‌توانیم حذفشان کنیم:

$$((m^2 - 1)x^2 - 4mx + 4)(\sqrt{x} - 2) > 0$$

ریشه پراتنز دوم را حساب می‌کنیم:

$$\sqrt{x} - 2 = 0 \Rightarrow x = 4$$

جواب نامعادله به صورت $(2, 4)$ بود، حالا که $x = 4$ ریشه پراتنز دوم است، پس باید ریشه پراتنز اول ۲ باشد:

$$4(m^2 - 1) - 4m + 4 = 0 \Rightarrow 4m^2 - 4m = 0 \Rightarrow 4m(m - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

حالا به ازای هر دو مقدار m ، نامعادله $((m^2 - 1)x^2 - 4mx + 4)(\sqrt{x} - 2) > 0$ را می‌نویسیم:

(۱) به ازای $m = 0$ نامعادله به شکل $(-x^2 + 4)(\sqrt{x} - 2) > 0$ در می‌آید.

(۲) به ازای $m = 1$ نامعادله به شکل $(3x^2 - 4x + 4)(\sqrt{x} - 2) > 0$ در می‌آید.

یک عدد در بازه $(2, 4)$ ، مثل $x = 3$ را در نامعادله‌ها چک می‌کنیم. این عدد فقط در نامعادله (۱)، صدق می‌کند، پس $m = 0$ قابل قبول است.

$$\frac{x+a}{x+1} - 2x > 0 \Rightarrow \frac{x+a-2x^2-2x}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{-2x^2-x+a}{x+1} > 0$$

باتوجه به بازه جواب و اینکه $x = -1$ ریشه مخرج می‌باشد، بنابراین $x = 1$ و $x = b$ ریشه‌های صورت کسر هستند:

$$x = 1 \Rightarrow -2(1)^2 - (1) + a = 0 \Rightarrow a = 3$$

پس صورت کسر به صورت $-2x^2 - x + 3$ است که ریشه دیگر این معادله $-\frac{3}{2}$ یا همان b می‌باشد.

$$\Rightarrow a + b = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

جعبه ابزار: تبدیل به یک نامعادله کسری

$$x - 5 - \frac{1}{x-1} > 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 6x + 4}{x-1} > 0$$

$$x^2 - 6x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - \sqrt{5} \\ \text{یا} \\ x = 3 + \sqrt{5} \end{cases}$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	$3-\sqrt{5}$	1	$3+\sqrt{5}$	$+\infty$
p	-	○	+	○	+
		ج	ت	ج	

$$\Rightarrow (3 - \sqrt{5}, 1) \cup (3 + \sqrt{5}, +\infty)$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $(a, 1)$ $(b, +\infty)$

$$\begin{cases} a = 3 - \sqrt{5} \\ b = 3 + \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow ab = (3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) = 9 - 5 = 4$$

چالش سؤال: برای حل نامعادله احتیاج به تعیین علامت است.

$$-2 < y < 0 \Rightarrow -2 < \frac{2}{(x-1)(x-2)} < 0 \Rightarrow \frac{2}{(x-1)(x-2)} < 0 \Rightarrow 1 < x < 2 \Rightarrow \text{هیچ مقدار}$$

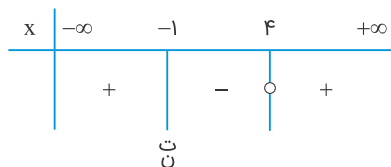
$$\frac{2x+3}{2} - \frac{3}{4} > \frac{4x+1}{3} \Rightarrow \frac{2x}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{4} > \frac{4x}{3} + \frac{1}{3} \Rightarrow x + \frac{3}{4} > \frac{4x}{3} + \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x - \frac{4}{3}x > \frac{1}{3} - \frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{x}{3} > \frac{-5}{12} \xrightarrow{\times(-3)} x < \frac{5}{4}$$

هر نامعادله را جداگانه حل کرده و از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم:

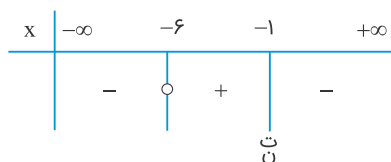
$$\frac{2x-3}{x+1} > 1 \Rightarrow \frac{2x-3}{x+1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{x-4}{x+1} > 0$$

$$\Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 4 \quad (\text{I})$$



$$\frac{2x-3}{x+1} < 3 \Rightarrow \frac{2x-3}{x+1} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{-x-6}{x+1} < 0$$

$$\Rightarrow x < -6 \text{ یا } x > -1 \quad (\text{II})$$



از (I) و (II) به جواب $x > 4$ یا $x < -6$ می‌رسیم که همان $\mathbb{R} - [-6, 4]$ است.

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2) \leq 0$$

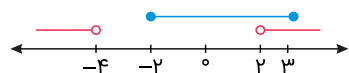
x	-2	3
$x^2 - x - 6$	+ 0 - 0 +	

$$\Rightarrow A = [-2, 3]$$

$$x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2) > 0$$

x	-4	2
$x^2 + 2x - 8$	+ 0 - 0 +	

$$B = (-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$$



$$A \cap B = (2, 3]$$

$$-1 < \frac{2x-1}{x+1} < 3 \Rightarrow \begin{cases} 1) -1 < \frac{2x-1}{x+1} \\ 2) \frac{2x-1}{x+1} < 3 \end{cases}$$

هر دو معادله را جداگانه حل می‌کنیم:

$$1) \frac{2x-1}{x+1} > -1 \Rightarrow \frac{2x-1}{x+1} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{2x-1+x+1}{x+1} > 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{3x}{x+1}}_{p(x)} > 0$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
p(x)	$\frac{+}{-}$	$\frac{+}{-}$	$\frac{-}{+}$	$\frac{+}{-}$

$$\Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 0 \text{ (I)}$$

$$2) \frac{2x-1}{x+1} < 3 \Rightarrow \frac{2x-1}{x+1} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{2x-1-3x-3}{x+1} < 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{-x-4}{x+1}}_{q(x)} < 0$$

x	$-\infty$	-4	-1	$+\infty$
q(x)	$\frac{-}{+}$	$\frac{-}{+}$	$\frac{+}{-}$	$\frac{-}{+}$

$$\Rightarrow x < -4 \text{ یا } x > -1 \text{ (II)}$$

حال اشتراک دو جواب (I) و (II) را به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{(I) \cap (II)} x < -4 \text{ یا } x > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} - [-4, 0]$$

راه حل تستی: (عددگذاری)

حذف گزینه "۴":

$$x = 0 \Rightarrow -1 < \frac{-1}{1} < 3 \quad \times$$

حذف گزینه‌های "۱" و "۲" (عدد ۵- در این دو گزینه وجود ندارد):

$$x = -5 \Rightarrow -1 < \frac{-11}{-4} < 3 \Rightarrow -1 < \frac{11}{4} < 3 \quad \checkmark$$

راه حل تستی:

$$x = 3 \xrightarrow{\text{جایگذاری در نامعادله}} \frac{13}{4} > 3 \quad \checkmark$$

$x = 3$ در نامعادله صدق می‌کند، پس گزینه‌های ۱ و ۴ حذف می‌شوند.

$$x = 0 \xrightarrow{\text{جایگذاری در نامعادله}} 4 > 0 \Rightarrow \text{گزینه ۲ هم حذف می‌شود}$$

راه حل تشریحی:

$$\begin{aligned} \frac{7x-8}{(x-2)(x+1)} - \frac{x}{x-2} > 0 &\Rightarrow \frac{(7x-8) - x(x+1)}{(x-2)(x+1)} > 0 \\ \Rightarrow \frac{-x^2 + 6x - 8}{(x-2)(x+1)} = \frac{-(x-2)(x-4)}{(x-2)(x+1)} = -\frac{x-4}{x+1} > 0 \end{aligned}$$

x	-1	2	4
$-\frac{x-4}{x+1}$	-	+	-

$$\Rightarrow x \in (-1, 2) \cup (2, 4)$$

جعبه ابزار: تعیین علامت. خاصیت تغییر علامت یا عدم تغییر علامت ریشه‌ها در جدول تعیین علامت.
در مرحله نخست عبارت را به شکل زیر در می‌آوریم:

$$\frac{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-2)(ax-12)}{(2x+b)} \geq 0$$

$$\sqrt{x}-2=0 \Rightarrow x=4$$

یکی از ریشه‌ها، ۴ است که باعث تغییر علامت نشده است. پس این ریشه مضاعف است و ریشه عبارت $(ax-12)$ است، از طرفی ۳ جزء مجموعه جواب نیست. باتوجه به اینکه نامعادله، علامت مساوی صفر نیز دارد پس ۳ باید ریشه مخرج باشد.
پس:

$$\left. \begin{aligned} ax-12 &\Rightarrow 4a-12=0 \Rightarrow a=3 \\ 2x+b &\Rightarrow 6+b=0 \Rightarrow b=-6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2a+b=2 \times 3 - 6 = 0$$

چالش سؤال: تجزیه عبارت $x+2\sqrt{x}-8$ به شکل صحیح - تشخیص ۳ به عنوان ریشه مخرج - تشخیص ۴ به عنوان ریشه مضاعف

فرض کنید $x = -\frac{1}{64}$ باشد، در این صورت برای گزینه (۱) داریم:

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt{-x} = \sqrt[3]{-\frac{1}{64}} + \sqrt{\frac{1}{64}} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0 \quad \checkmark$$

گزینه ۲: عبارت $\sqrt{-x}$ مثبت است و $\sqrt[3]{x}$ منفی است، پس امکان ندارد که $\sqrt[3]{x} > \sqrt{-x}$ باشد.
گزینه ۳:

$$\sqrt[3]{x^2} > \sqrt{-x} \xrightarrow{\text{توان ۶}} x^4 > (-x)^3 \quad \times$$

گزینه ۴:

$$x^2 + x = x(x+1) > 0 \Rightarrow x > 0 \text{ یا } x < -1 \quad \times$$

$$2x^2 - 3 < \frac{x^2 + 1}{x^2 - 3} \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x^2 - 3} - 2x^2 + 3 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 1 - 2x^4 + 6x^2 + 3x^2 - 9}{x^2 - 3} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2x^4 + 10x^2 - 8}{x^2 - 3} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2(x^2 - 5x^2 + 4)}{x^2 - 3} = \frac{-2(x^2 - 1)(x^2 - 4)}{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})} > 0$$

x	-۲	$-\sqrt{3}$	-۱	۱	$\sqrt{3}$	۲
کسر	-	+	-	+	-	-

$$x \in (-2, -\sqrt{3}) \cup (-1, 1) \cup (\sqrt{3}, 2)$$

$x = 0$ تنها عدد صحیح در بازه فوق است.

عبارت $x^2 + 1$ همواره مثبت است و همچنین با شرط $x > \frac{7}{3}$ عبارت‌های $3x - 7$ و $\sqrt{x} - 1$ نیز مثبت‌اند، پس نامعادله داده‌شده به‌صورت زیر خواهد بود:

$$(x - 3)^3 < 0 \Rightarrow x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3 \xrightarrow{\cap(x > \frac{7}{3})} x \in \left(\frac{7}{3}, 3\right)$$

$$\Rightarrow a \times b = \frac{7}{3} \times 3 = 7$$

می‌خواهیم تابع $y = (m + 2)x^2 + 2mx + m$ همواره بالای خط $y = x + 1$ باشد. یعنی:

$$(m + 2)x^2 + 2mx + m > x + 1 \Rightarrow (m + 2)x^2 + (2m - 1)x + m - 1 > 0$$

رابطه بالا همواره برقرار است. پس باید:

$$1) m + 2 > 0 \Rightarrow m > -2$$

$$2) \Delta < 0 \Rightarrow (2m - 1)^2 - 4(m + 2)(m - 1) < 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 - 4m + 1 - 4(m^2 + m - 2) < 0$$

$$\Rightarrow -8m + 9 < 0 \Rightarrow 8m > 9 \Rightarrow m > \frac{9}{8}$$

بین مقادیر به‌دست‌آمده برای m باید اشتراک بگیریم. اشتراک آن‌ها $m > \frac{9}{8}$ است.

چون مخرج کسر همواره مثبت است، با مخرج مشترک‌گیری در نامعادله صورت تست، به نامعادله زیر می‌رسیم. داریم:

$$\frac{2x^2 + 2x + 3 - a(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} \leq 0 \xrightarrow{x^2 + x + 1 > 0} (2 - a)x^2 + (2 - a)x + 3 - a \leq 0$$

عبارت حاصل باید همواره کوچک‌تر یا مساوی صفر باشد؛ بنابراین باید Δ را کوچک‌تر مساوی صفر قرار داده و ضریب x^2 را منفی قرار دهیم. داریم:

$$x^2 \text{ ضریب} = 2 - a < 0 \Rightarrow a > 2$$

$$\Delta = (2 - a)^2 - 4(2 - a)(3 - a) = (2 - a)(2 - a - 12 + 4a) = (2 - a)(3a - 10)$$

$$\xrightarrow{\Delta \leq 0} a \leq 2 \text{ یا } a \geq \frac{10}{3} \xrightarrow{a > 2} a \geq \frac{10}{3}$$

$$\xrightarrow{a \text{ عدد طبیعی تک رقمی است}} a \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

پس برای a ، ۶ مقدار طبیعی و یک رقمی وجود دارد.

ضابطه سهمی را بزرگ‌تر از ضابطه خط قرار می‌دهیم:

$$f(x) > y_{\text{خط}}$$

$$(x-1)^2 + 3 > kx - 2k \Rightarrow x^2 + (-2-k)x + 4 + 2k > 0$$

برای آنکه نامعادله بالا، همواره برقرار باشد، باید هر دو شرط زیر را داشته باشد:

$$1) x^2 > 0 \text{ ضرب ۱)}$$

$$2) \Delta < 0 \Rightarrow k^2 + 4k + 4 - 16 - 8k < 0 \Rightarrow k^2 - 4k - 12 < 0$$

$$\Rightarrow (k-6)(k+2) < 0 \Rightarrow -2 < k < 6$$

با فاکتورگیری از عامل x^3 در صورت و تجزیه مخرج به کمک اتحاد چاق و لاغر، عبارت را کمی ساده‌تر می‌کنیم:

$$\frac{x^3(x^2 - \sqrt{2}x + 2)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} < 0$$

در عبارت‌های $x^2 - \sqrt{2}x + 2$ و $x^2 + 2x + 4$ ، واضح است که $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$ پس این عبارت‌ها، همواره مثبت بوده و تأثیری در تعیین علامت ندارند، لذا کافی است عبارت زیر را تعیین علامت کنیم:

$$\frac{x^3}{x-2} < 0 \Rightarrow 0 < x < 2$$

وقتی تابع $f(x) = (ax + 1)(ax^2 - 3x - 2)$ در فاصله $(2, +\infty)$ مثبت است، یعنی $x = 2$ باید ریشه این تابع باشد. در نتیجه پرانتز اول یا دوم در $x = 2$ صفر است.

$$1) \text{ پرانتز اول: } ax + 1 = 0 \xrightarrow{x=2} 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) = \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)\left(-\frac{1}{2}x^2 - 3x - 2\right) > 0$$

ریشه پرانتز بزرگتر را پیدا می‌کنیم:

$$-\frac{1}{2}x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)(-2)}}{2\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{-1}$$

با تشکیل جدول تعیین علامت، متوجه می‌شویم که $a = -\frac{1}{2}$ قابل قبول نیست.

x	$-\frac{3-\sqrt{5}}{1}$	$-\frac{3+\sqrt{5}}{1}$	2
f(x)	-	+	-

$$2) \text{ پرانتز دوم: } ax^2 - 3x - 2 \xrightarrow{x=2} 4a - 6 - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$f(x) = (2x + 1)(2x^2 - 3x - 2) = (2x + 1)(2x + 1)(x - 2) \\ = (2x + 1)^2(x - 2) > 0 \Rightarrow x > 2$$

پس فقط $a = 2$ قابل قبول است.

ابتدا نامعادله‌ها را به صورت مجزا حل می‌کنیم و در آخر بین جواب‌های به دست آمده، اشتراک می‌گیریم:

$$(1) \quad x^2 - 3x \leq 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 \leq 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 1) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 4$$

$$(2) \quad 2x - 4 < x^2 - 3x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 > 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 4) > 0 \Rightarrow x > 4 \cup x < 1$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow -1 \leq x < 1$$

گام اول

الف) نمودار تابع $f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4}$ در صورتی پایین خط $y = 2$ قرار می گیرد که نامعادله $\frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4} < 2$ برقرار باشد.
 ب) با تعیین علامت، محدوده جواب نامعادله را تعیین کرده، آن را با بازه (a, b) مطابقت داده و مقدار $b - a$ را محاسبه می کنیم.

گام دوم

$$\frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4} < 2 \Rightarrow \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4} - 2 < 0 \Rightarrow \frac{3x^2 - 2x - 2x^2 - 8}{x^2 + 4} < 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + 4} < 0$$

$$\xrightarrow{x^2 + 4 > 0} x^2 - 2x - 8 < 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) < 0 \Rightarrow -2 < x < 4 \Rightarrow x \in (-2, 4)$$

بنابراین بازه (a, b) به صورت $(-2, 4)$ در آمده و حاصل $b - a$ برابر است با:

$$b - a = 4 - (-2) = 4 + 2 = 6$$

از سمت راست x را فاکتور می گیریم:

$$1 + \sqrt{x} < x + x\sqrt{x} \Rightarrow 1 + \sqrt{x} < x(1 + \sqrt{x})$$

طرفین را می توانیم به عبارت $1 + \sqrt{x}$ تقسیم کنیم چون $1 + \sqrt{x}$ همواره مثبت است.

$$\frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} < x \Rightarrow 1 < x$$

$$|x^3 + 4x - 5| < 3(x^2 + x + 5)$$

$$\Rightarrow |(x - 1)(x^2 + x + 5)| < 3(x^2 + x + 5)$$

عبارت $x^2 + x + 5$ همواره مثبت است، پس نامعادله به صورت زیر خواهد بود:

$$|x - 1| < 3 \Rightarrow -3 < x - 1 < 3 \Rightarrow -2 < x < 4$$

بازه به دست آمده شامل اعداد صحیح $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ است.

$$\left| \frac{3x - 1}{2x + 3} \right| < 1 \Rightarrow |3x - 1| < |2x + 3| \quad \left(x \neq -\frac{3}{2} \right)$$

$$\Rightarrow (3x - 1)^2 < (2x + 3)^2 \Rightarrow 9x^2 - 6x + 1 < 4x^2 + 12x + 9$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 18x - 8 < 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{18 - 22}{10}, \frac{18 + 22}{10} \right) = (-0.4, 4)$$

راه حل اول: نامعادله فقط برای $x > 0$ جواب دارد. بنابراین:

$$|x^2 - 2x| < x \Rightarrow |x(x - 2)| < x \xrightarrow{x > 0} |x - 2| < 1$$

$$\Rightarrow -1 < x - 2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$$

راه حل دوم: داریم:

$$|a| < k \Rightarrow -k < a < k$$

نامعادله را در دو مرحله ($-k < a$ و $a < k$) حل کرده و بین مجموعه جواب‌های به دست آمده اشتراک می‌گیریم.

$$|x^2 - 2x| < x \Rightarrow -x < x^2 - 2x < x$$

$$1) \quad x^2 - 2x > -x \Rightarrow x^2 - x > 0 \Rightarrow x(x - 1) > 0 \Rightarrow x > 1 \text{ یا } x < 0 \quad (\text{I})$$

$$2) \quad x^2 - 2x < x \Rightarrow x^2 - 3x < 0 \Rightarrow x(x - 3) < 0 \Rightarrow 0 < x < 3 \quad (\text{II})$$

نامعادله‌های ۱ و ۲ باید هم‌زمان برقرار باشند، پس بین دو مجموعه جواب به دست آمده اشتراک می‌گیریم:

$$(\text{I}) \cap (\text{II}) : 1 < x < 3 \Rightarrow x \in (1, 3)$$

عبارت $|x^3 - 1|$ را تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{|x^3 - 1|}{x - 1} < x^2 + x + 1 \Rightarrow \frac{|x - 1| |x^2 + x + 1|}{x - 1} < x^2 + x + 1$$

در عبارت $x^2 + x + 1$ داریم $\Delta < 0$ ، بنابراین عبارت همواره مثبت است:

$$\Rightarrow \frac{|x - 1| \cancel{(x^2 + x + 1)}}{x - 1} < \cancel{x^2 + x + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{|x - 1|}{x - 1} < 1 \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \Rightarrow \frac{(x - 1)}{x - 1} < 1 \Rightarrow 1 < 1 \\ x < 1 \Rightarrow \frac{-(x - 1)}{x - 1} < 1 \Rightarrow -1 < 1 \end{cases}$$

در نتیجه جواب نامعادله، بازه $(-\infty, 1)$ است که عدد طبیعی در این بازه وجود ندارد.

راه حل اول:
با عددگذاری داریم:

$$x = 1 \xrightarrow[\text{در نامعادله}]{\text{با جایگذاری}} -1 < \frac{3(1) + 1}{(1) - 3} < 3 \Rightarrow -1 < -2 < 3 \quad \times$$

بنابراین گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ نادرست است.

راه حل دوم:

گام اول

نامعادله را به نامعادله‌ای به فرم $-a < u < a$ تبدیل می‌کنیم تا از ویژگی‌های نامعادلات قدر مطلق استفاده کنیم.

گام دوم

$$\begin{aligned} -1 < \frac{3x+1}{x-3} < 3 &\xrightarrow{-1} -2 < \frac{3x+1-x+3}{x-3} < 2 \Rightarrow -2 < \frac{2x+4}{x-3} < 2 \\ \Rightarrow \left| \frac{2(x+2)}{x-3} \right| < 2 &\xrightarrow{\div 2} \left| \frac{x+2}{x-3} \right| < 1 \Rightarrow |x+2| < |x-3| \\ \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} x^2 + 4x + 4 < x^2 - 6x + 9 &\Rightarrow 10x < 5 \xrightarrow{\div 10} x < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{2-x}{2x-3} \right| > 1 &\Rightarrow \left(\frac{2-x}{2x-3} \right)^2 > 1 \xrightarrow{x \neq \frac{3}{2}} x^2 - 4x + 4 > 4x^2 - 12x + 9 \\ \Rightarrow 3x^2 - 8x + 5 < 0 &\Rightarrow 3x^2 - 8x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 64 - 4(3)(5) = 4 \\ \Rightarrow x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{6} &\Rightarrow x_{1,2} = 1, \frac{5}{3} \end{aligned}$$

x	1	$\frac{5}{3}$
$3x^2 - 8x + 5$	+	-

مقدار $x = \frac{3}{2}$ که در این بازه قرار دارد، غیرقابل قبول است (ریشهٔ مخرج است)، پس مجموعه جواب صحیح این نامعادله به صورت زیر است:

$$x \in \left(1, \frac{5}{3}\right) - \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

نکته: گزینه‌های ۱ و ۳ را نیز می‌توان به عنوان جواب‌های درست در نظر گرفت ولی باتوجه به گزینه‌های موجود کامل‌ترین جواب گزینهٔ ۲ است. در غیر این صورت گزینه‌های ۱ و ۳ هم صحیح خواهند بود.

روش اول:

این نامعادله را در دو حالت حل می‌کنیم. یک بار $x \geq 0$ و بار دیگر $x < 0$ فرض می‌شود. مجموعه جواب نامعادله را در هریک از حالت‌ها به دست آورده و چون هر دوی آن‌ها برای ما قابل قبول است بین آن‌ها اجتماع می‌گیریم.

$$۱) \quad x \geq 0 \Rightarrow |x| = x : x + |x| \leq \frac{1}{4}x + 3 \xrightarrow{|x|=x} x + x \leq \frac{1}{4}x + 3$$

$$\Rightarrow 2x \leq \frac{1}{4}x + 3 \Rightarrow \frac{3}{4}x \leq 3 \Rightarrow x \leq 4 \xrightarrow{x \geq 0} 0 \leq x \leq 4$$

$$۲) \quad x < 0 \Rightarrow |x| = -x : x + |x| \leq \frac{1}{4}x + 3 \xrightarrow{|x|=-x} x - x \leq \frac{1}{4}x + 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}x + 3 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}x \geq -3 \Rightarrow x \geq -12 \xrightarrow{x < 0} -12 \leq x < 0$$

$$\text{مجموعه جواب نامعادله} = [-12, 0) \cup [0, 4] = [-12, 4]$$

روش دوم:

اگر $|x| \leq a$ و $a \geq 0$ ، آنگاه $-a \leq x \leq a$ ، بنابراین می‌توان نوشت:

$$x + |x| \leq \frac{1}{4}x + 3$$

$$|x| \leq -\frac{1}{4}x + 3 \Rightarrow -(-\frac{1}{4}x + 3) \leq x \leq -\frac{1}{4}x + 3$$

$$x \leq -\frac{1}{4}x + 3 \Rightarrow \frac{3}{4}x \leq 3 \Rightarrow x \leq 4$$

$$x \geq -(-\frac{1}{4}x + 3) \Rightarrow x \geq \frac{1}{4}x - 3 \Rightarrow \frac{1}{4}x \geq -3 \Rightarrow x \geq -12$$

بنابراین $-12 \leq x \leq 4$ است.

از طرفی:

$$-\frac{1}{4}x + 3 \geq 0 \Rightarrow -\frac{1}{4}x \geq -3 \Rightarrow x \leq 12$$

پس مجموعه جواب نامعادله به صورت $[-12, 4]$ به دست می‌آید.

یکبار فرض می‌کنیم $x \geq 0$ باشد و بار دیگر $x < 0$. در هر دو حالت مجموعه جواب نامعادله را تعیین کرده و سپس بین آن‌ها اجتماع می‌گیریم.

$$x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$$

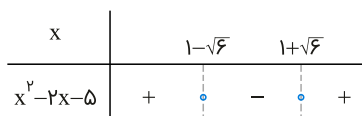
$$(x-4)x < 2x-5 \Rightarrow x^2-4x < 2x-5 \Rightarrow x^2-6x+5 < 0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x-1) < 0 \Rightarrow 1 < x < 5 \quad (I)$$

باتوجه به محدوده اولیه ($x \geq 0$) این جواب قابل قبول است.

$$x < 0 \Rightarrow |x| = -x$$

$$(x-4)(-x) < 2x-5 \Rightarrow -x^2+4x < 2x-5 \Rightarrow x^2-2x-5 > 0$$



$$x < 1 - \sqrt{6} \text{ یا } x > 1 + \sqrt{6} \xrightarrow{x < 0} x < 1 - \sqrt{6} \quad (II)$$

اجتماع دو مجموعه جواب (I) و (II) برابر است با:

$$(-\infty, 1 - \sqrt{6}) \cup (1, 5)$$

$$15x^2 + 73x + 14 < 0 \Rightarrow (5x+1)(3x+14) < 0 \Rightarrow \frac{-14}{3} < x < \frac{-1}{5} \quad (1)$$

$$\left| \frac{x-1}{2} - 1 \right| > 3 \Rightarrow \left| \frac{x-3}{2} \right| > 3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{2} > 3 \\ \text{یا} \\ \frac{x-3}{2} < -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 9 \\ \text{یا} \\ x < -3 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (9, +\infty) \quad (2)$$

اشتراک (۱) و (۲) برابر است با:

$$-\frac{14}{3} < x < -3 \Rightarrow \max(b-a) = \frac{14}{3} - 3 = \frac{5}{3}$$

باید عبارت $|a+1| - 1$ منفی باشد.

$$1 - |a+1| < 0 \Rightarrow |a+1| > 1 \Rightarrow \begin{cases} a+1 > 1 \Rightarrow a > 0 \\ a+1 < -1 \Rightarrow a < -2 \end{cases}$$

بنابراین $a \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty) = \mathbb{R} - [-2, 0]$ است.

با فرض $x \neq -\frac{1}{3}$ طرفین نامعادله را در $|2x+1|$ ضرب کرده و آن را از حالت کسری خارج می‌کنیم. وقتی دو طرف نامعادله مثبت باشند، می‌توان با خیال راحت دو طرف را به توان دو رساند تا از شر قدرمطلق راحت شده و مجموعه جواب نامعادله را به راحتی تعیین کنیم.

$$\frac{|x-2|}{|2x+1|} > 1 \xrightarrow{x \neq -\frac{1}{3}} |x-2| > |2x+1| \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} (x-2)^2 > (2x+1)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 > 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow 3x^2 + 8x - 3 < 0 \Rightarrow (x+3)(3x-1) < 0 \Rightarrow -3 < x < \frac{1}{3}$$

با توجه به شرط $x = -\frac{1}{3}$ در ابتدای حل تست، باید این مقدار x را از مجموعه جواب به دست آمده خارج کنیم:

$$\text{مجموعه جواب نامعادله} = (-3, \frac{1}{3}) - \left\{-\frac{1}{3}\right\} = (-3, -\frac{1}{3}) \cup (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

دقت کنید که گزینه‌های ۳ و ۴ نیز شامل بخشی از جواب هستند، اما کامل‌ترین گزینه، گزینه ۱ است.

$$-x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} > 2x + |x| \xrightarrow{\times 2} -2x^2 - x + 9 > 4x + 2|x|$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 5x + 2|x| - 9 < 0$$

$$۱) x \geq 0 \Rightarrow 2x^2 + 7x - 9 < 0 \Rightarrow (2x+9)(x-1) < 0$$

$$\Rightarrow -\frac{9}{2} < x < 1 \xrightarrow{\text{اشتراک}} 0 \leq x < 1$$

$$۲) x < 0 \Rightarrow 2x^2 + 3x - 9 < 0 \Rightarrow (2x-3)(x+3) < 0$$

$$\Rightarrow -3 < x < \frac{3}{2} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -3 < x < 0$$

$$\text{اجتماع جواب‌ها: } -3 < x < 1 \xrightarrow{\text{وسط بازه}} \frac{-3+1}{2} = -1$$

نمودار $y = (x-1)^2$ بالاتر از نمودار $y = 4x^2$ قرار دارد، پس:

$$(x-1)^2 > 4x^2 \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} |x-1| > 2x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1) x-1 > 2x^2 \\ \text{یا} \\ 2) x-1 < -2x^2 \end{cases}$$

دو نامعادله فوق را حل می‌کنیم:

$$1) x-1 > 2x^2 \Rightarrow 2x^2 - x + 1 < 0 \xrightarrow{a>0, \Delta < 0} \text{غقق}$$

$$2) x-1 < -2x^2 \Rightarrow \underbrace{2x^2 + x - 1}_{p(x)} < 0 \Rightarrow \Delta = 9 \Rightarrow x = -1, \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
p(x)	+	0	0	+

$$\Rightarrow x \in (-1, \frac{1}{2})$$

برای اینکه $b - a$ بیشترین مقدار باشد باید $(a, b) = (-1, \frac{1}{2})$ ، در نتیجه:

$$b - a = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

نامعادله فقط برای $x > 0$ جواب دارد.

$$|x^2 + 3x| < 2x \xrightarrow{x>0} |x+3| < 2 \Rightarrow -2 < x+3 < 2$$

$$\Rightarrow 0 < x+5 < 4 \xrightarrow{(x+5) \in \mathbb{N}} (x+5) \in \{1, 2, 3\}$$

$$(|x| + 3)(|x| - 4) < 0$$

$$\xrightarrow{|x|+3 \text{ همواره مثبت}} |x| - 4 < 0 \Rightarrow |x| < 4 \Rightarrow -4 < x < 4$$

$$\begin{aligned}
 |2x^2 - x - 6| - x + 2x^2 - 6 &\leq 0 \Rightarrow |2x^2 - x - 6| + (2x^2 - x - 6) \leq 0 \\
 2x^2 - x - 6 = a \xrightarrow{|a|+a \leq 0} a &\leq 0 \\
 \Rightarrow 2x^2 - x - 6 &\leq 0 \Rightarrow (2x+3)(x-2) \leq 0 \\
 \Rightarrow \frac{-3}{2} &\leq x \leq 2
 \end{aligned}$$

اعداد صحیح در این فاصله -۱ و ۰ و ۱ و ۲ هستند، پس ۴ عدد صحیح در نامعادله داده شده صدق می‌کند.

$$\begin{aligned}
 \text{نکته: } |a| < b &\xleftrightarrow{b>0} -b < a < b \\
 ||x-2|-1| < 3 &\Rightarrow -3 < |x-2|-1 < 3 \\
 \xrightarrow{+1} -2 < |x-2| < 4 \\
 \Rightarrow \begin{cases} |x-2| > -2 \xrightarrow{|a|\geq 0} x \in \mathbb{R} & (1) \\ |x-2| < 4 \Rightarrow -4 < x-2 < 4 \Rightarrow -2 < x < 6 & (2) \end{cases} \\
 \xrightarrow{(1) \cap (2)} x \in &(-2, 6)
 \end{aligned}$$

پس نامعادله شامل اعداد صحیح ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۰ و -۱ است.

چون عبارت $|x| + 1$ همواره مثبت است، پس:

$$\begin{aligned}
 x^2 - 4x - 5 < 0 &\Rightarrow -1 < x < 5 \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز بازه} = \frac{5-1}{2} = 2 \\ \text{طول بازه} = 5+1 = 6 \end{cases} \\
 -1 < x < 5 &\Rightarrow |x-2| < 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |3x-1| < |x+1| &\Rightarrow (3x-1-x-1)(3x-1+x+1) < 0 \\
 \Rightarrow (2x-2)(4x) &< 0 \Rightarrow 0 < x < 1 \quad (1) \\
 x^2 + x - 6 &\leq 0 \Rightarrow (x+3)(x-2) \leq 0 \Rightarrow -3 \leq x \leq 2 \quad (2)
 \end{aligned}$$

اشتراک (۱) و (۲) برابر (۱, ۰) است.

نامعادله داده شده به سه نامعادله تبدیل می شود:

$$|x - 6| < 10 \Rightarrow -10 < x - 6 < 10 \xrightarrow{+6} -4 < x < 16 \quad (1)$$

$$|x - 3| < |x - 6| \Rightarrow (x - 3 + x - 6)(x - 3 - x + 6) < 0$$

$$\Rightarrow 2x < 9 \Rightarrow x < \frac{9}{2} \quad (2)$$

$$|x - 3| > 2 \Rightarrow x - 3 > 2 \text{ یا } x - 3 < -2$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty) \quad (3)$$

اشتراک جواب های به دست آمده را محاسبه می کنیم:

$$(1) \cap (2) \cap (3) \Rightarrow -4 < x < 1 \Rightarrow \text{وسط بازه} = \frac{-4 + 1}{2} = -1/2$$

$$|2 - 3x| > 5 \Rightarrow \begin{cases} 2 - 3x > 5 \Rightarrow 3x < -3 \Rightarrow x < -1 \\ 2 - 3x < -5 \Rightarrow 3x > 7 \Rightarrow x > \frac{7}{3} \end{cases} \quad (I)$$

$$|x - 2| \leq x \Rightarrow x^2 - 4x + 4 \leq x^2 \Rightarrow 4x \geq 4 \Rightarrow x \geq 1 \quad (II)$$

$$\Rightarrow (I) \cap (II) : \left(\frac{7}{3}, +\infty\right)$$

ابتدا با تجزیه عوامل مخرج، عبارت را به صورت ساده‌تری می‌نویسیم:

$$\frac{(x-2)^3 |3x+9| (x^2-x+5)}{\underbrace{(x^2-1)}_{(x-1)(x+1)} \underbrace{(x^2-5x+4)}_{(x-1)(x-4)}} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x-2)^3 |3x+9| (x^2-x+5)}{(x-1)^2 (x+1)(x-4)} \geq 0$$

عبارت به دست آمده را تعیین علامت می‌کنیم:

	$-\infty$	-3	-1	1	2	4	$+\infty$
$(x-2)^3$	-	-	-	-	+	+	+
$ 3x+9 $	+	+	+	+	+	+	+
x^2-x+5	+	+	+	+	+	+	+
$(x-1)^2$	+	+	+	+	+	+	+
$x+1$	-	-	+	+	+	+	+
$x-4$	-	-	-	-	-	+	+
P	-	+	-	+	+	-	+

مجموعه جواب نهایی برابر است با:

$$(-1, 1) \cup (1, 2] \cup (4, +\infty) \cup \{-3\}$$

پس در مجموعه جواب آخر، ۴ عدد صحیح ۵، ۲، ۰، -۳، x متعلق به بازه $[-5, 5]$ وجود دارد.

$$(3x^2 - x)^2 < 4 \xrightarrow{\text{رادیکال}} |3x^2 - x| < 2 \Rightarrow -2 < 3x^2 - x < 2$$

$$1) -2 < 3x^2 - x \Rightarrow 3x^2 - x + 2 > 0 \Rightarrow \Delta < 0 \text{ و همواره برقرار است.}$$

$$2) 3x^2 - x < 2 \Rightarrow 3x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow (3x+2)(x-1) < 0 \Rightarrow \frac{-2}{3} < x < 1$$

بنابراین مجموعه جواب نامعادله به صورت $\frac{-2}{3} < x < 1$ است. پس:

$$b - a = 1 - \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

اگر $x \geq 0$ باشد، مخرج کسر $\frac{1}{x - |x|}$ صفر می‌شود، پس $x < 0$ است.

$$\frac{1}{x - |x|} > x + |x| \xrightarrow{x < 0} \frac{1}{x + x} > x + (-x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2x} > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$$

چون باید $x < 0$ باشد، به تناقض می‌رسیم؛ پس مجموعه جواب نامعادله $\emptyset$ است.

اول ریشه‌های عبارت $A = \frac{(-x^2 + x - 1)(5 - x^2)}{|x - 2|}$ را تعیین می‌کنیم:

$$A = \frac{(-x^2 + x - 1)(5 - x^2)}{|x - 2|} = \frac{(-x^2 + x - 1)(\sqrt{5} - x)(\sqrt{5} + x)}{|x - 2|}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-x^2 + x - 1) = 0, & \Delta < 0 : \text{ریشه ندارد} \\ \sqrt{5} - x = 0 \Rightarrow x = \sqrt{5} \\ \sqrt{5} + x = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{5} \\ |x - 2| = 0 \Rightarrow x = 2 (*) \end{cases}$$

جدول تعیین علامت یک سطر را می‌کشیم و آن را پر می‌کنیم:

	$-\infty$	$-\sqrt{5}$	2	$\sqrt{5}$	$+\infty$
A	+	+	-	-	+

ما دنبال قسمت‌های $A \leq 0$ هستیم یعنی $\{2\} - [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$ ، اعداد صحیح این محدوده را می‌نویسیم:

$$[-2/2, 2/2] - \{2\} \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} -2, -1, 0, 1 \quad \text{۴ جواب صحیح}$$

می‌دانیم $0 \leq |x^3 - 7|$ ، پس برای آنکه نامساوی $|x^3 - 7| \geq 4m^2 + 5m - 6$ همواره برقرار باشد، کافی است:

$$4m^2 + 5m - 6 \leq 0$$

$$4m^2 + 5m - 6 = 0 \Rightarrow m^2 + 5m - 24 = 0 \Rightarrow m = -8, 3$$

پس جواب‌های واقعی این معادله عبارت‌اند از:

$$m = \frac{-5}{4} = -1.25, \frac{3}{4}$$

حال داریم:

$$4m^2 + 5m - 6 \leq 0 \Rightarrow -1.25 \leq m \leq \frac{3}{4}$$

این بازه شامل سه عدد صحیح $0, -1, -2$ است.

$$|mx + n| > 11$$

$$\Rightarrow \begin{cases} mx + n > 11 \Rightarrow mx > 11 - n \xrightarrow{m>0} x > \frac{11 - n}{m} \quad (1) \\ mx + n < -11 \Rightarrow mx < -11 - n \xrightarrow{m>0} x < \frac{-11 - n}{m} \quad (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} x \in \mathbb{R} - \left[\frac{-11 - n}{m}, \frac{11 - n}{m} \right]$$

از مقایسه با $\mathbb{R} - [-5, 6]$ داریم:

$$\begin{cases} \frac{-11 - n}{m} = -5 \Rightarrow 5m - n = 11 \\ \frac{11 - n}{m} = 6 \Rightarrow 6m + n = 11 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 11m = 22 \Rightarrow m = 2, n = -1 \Rightarrow m - n = 3$$

سمت چپ نامساوی همواره مثبت است، پس سمت راست نیز باید مثبت باشد. یعنی $2x > 0$ ، پس $x > 0$.

$$\Rightarrow |2x - 3| + |x| < 2x \xrightarrow[|x|=x]{x>0} |2x - 3| + x < 2x$$

$$\Rightarrow |2x - 3| < x \Rightarrow -x < 2x - 3 < x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x < 2x - 3 \Rightarrow 3x > 3 \Rightarrow x > 1 \\ 2x - 3 < x \Rightarrow x < 3 \end{cases} \xrightarrow{\cap} 1 < x < 3$$

از طرفین نامساوی بالا، $\frac{1+3}{2} = 2$ کم می‌کنیم:

$$-1 < x - 2 < 1 \Rightarrow |x - 2| < 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = 3$$

ابتدا معادله خط را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$2y + x = 5 \Rightarrow 2y = -x + 5 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

نمودار تابع $y = 4 - |x|$ بالای خط $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ قرار دارد، پس باید نامعادله $4 - |x| > -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ برقرار باشد. جواب نامعادله را در دو حالت $x \geq 0$ و $x < 0$ تعیین می‌کنیم.

$$x \geq 0 : |x| = x \Rightarrow 4 - x > -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}x < 4 - \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}x < \frac{3}{2} \Rightarrow x < 3 \xrightarrow{x \geq 0} 0 \leq x < 3 \quad (I)$$

$$x < 0 : |x| = -x \Rightarrow 4 + x > -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}x > -\frac{3}{2} \xrightarrow{\div \frac{3}{2}} x > -1 \xrightarrow{x < 0} -1 < x < 0 \quad (II)$$

مجموعه جواب کل، اجتماع دو بازه (I) و (II) بوده که برابر $(-1, 3)$ می‌شود. $b - a$ برابر است با:

$$b - a = 3 - (-1) = 3 + 1 = 4$$

نمودار $y = |2x^2 - 4|$ در زیر خط $y = 2x$ قرار دارد، بنابراین:

$$|2x^2 - 4| < 2x$$

$$\Rightarrow -2x < 2x^2 - 4 < 2x \xrightarrow{\div 2} -x < x^2 - 2 < x$$

سپس هرکدام از نامعادلات $-x < x^2 - 2$ و $x^2 - 2 < x$ را جداگانه حل می‌کنیم:

$$x^2 - 2 > -x \Rightarrow \underbrace{x^2 + x - 2}_{p(x)} > 0$$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
p(x)		$\begin{array}{c} + \\ \text{ع} \end{array}$	$\begin{array}{c} - \\ \text{ع} \end{array}$	$\begin{array}{c} + \\ \text{ع} \end{array}$

$$\Rightarrow x < -2 \text{ یا } x > 1 \quad (1)$$

$$x^2 - 2 < x \Rightarrow \underbrace{x^2 - x - 2}_{q(x)} < 0$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
q(x)		$\begin{array}{c} + \\ \text{ع} \end{array}$	$\begin{array}{c} - \\ \text{ع} \end{array}$	$\begin{array}{c} + \\ \text{ع} \end{array}$

$$\Rightarrow -1 < x < 2 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow 1 < x < 2 \Rightarrow (a, b) = (1, 2)$$

بیشترین مقدار $b - a$ برابر است با:

$$2 - 1 = 1$$

گام اول

هر تابع شامل قدر مطلق را می‌توان به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای نوشت. می‌دانیم:

$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

گام دوم

عبارت $x^2 + 1$ همواره مثبت است؛ بنابراین:

$$|x^2 + 1| = x^2 + 1$$

نامعادله داده شده به صورت زیر می‌شود:

$$2x + 1 - |x - 2| > x^2 + 1$$

نامعادله را در دو حالت $x < 2$ و $x \geq 2$ حل می‌کنیم:

$$(I) \quad x \geq 2 \Rightarrow x - 2 \geq 0 \Rightarrow |x - 2| = x - 2$$

$$2x + 1 - (x - 2) > x^2 + 1 \Rightarrow 2x + 1 - x + 2 > x^2 + 1$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) < 0$$

$$\Rightarrow -1 < x < 2 \xrightarrow{x \geq 2} \text{هیچ مقداری نمی‌تواند داشته باشد}$$

$$(II) \quad x < 2 \Rightarrow x - 2 < 0 \Rightarrow |x - 2| = -(x - 2)$$

$$2x + 1 + x - 2 > x^2 + 1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 < 0$$

$$\Rightarrow (x - 2)(x - 1) < 0 \Rightarrow 1 < x < 2 \xrightarrow{x < 2} 1 < x < 2$$

اجتماع دو مجموعه جواب به دست آمده؛ یعنی بازه $(1, 2)$ ، مجموعه جواب نامعادله $|x^2 + 1| > |x - 2| + 2x$ می‌شود.

عبارت $x^2 + 3$ همواره مثبت است، پس تأثیری در حل نامعادله ندارد و حذف می‌کنیم:

$$x^2 - 4x - 12 < 0 \Rightarrow (x - 6)(x + 2) < 0 \Rightarrow -2 < x < 6$$

نامعادله دوم را حل می‌کنیم:

$$|x + a| < b \Rightarrow -b < x + a < b \Rightarrow -b - a < x < b - a$$

پس باید $-b - a = -2$ و $b - a = 6$ باشد، در نتیجه: $a = -2$ و $b = 4$. بنابراین:

$$\frac{a}{2} + b = -1 + 4 = 3$$

گام اول

الف) باتوجه به ریشه‌های قدر مطلق $|2x|$ و $|x-1|$ ، عبارت درون قدرمطلق‌ها را در سه محدوده $x < 0$ ، $0 \leq x \leq 1$ و $x > 1$ تعیین علامت می‌کنیم.

ب) جواب سؤال بازه‌ای است که روی آن $f(x) > g(x)$ باشد که در هریک از سه محدوده مشخص شده به صورت جداگانه تعیین می‌شود.

ج) اجتماع بازه‌های به دست آمده جواب سؤال خواهد بود.

گام دوم

$$۱) \quad x < 0 \Rightarrow |2x| = -2x \text{ و } |x-1| = -(x-1) = 1-x$$

$$f(x) > g(x) \Rightarrow 5 - |x-1| > |2x| \Rightarrow 5 - (1-x) > -2x \Rightarrow x+4 > -2x \Rightarrow 3x > -4 \\ \Rightarrow x > -\frac{4}{3} \xrightarrow{x < 0} x \in \left(-\frac{4}{3}, 0\right)$$

$$۲) \quad 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow |2x| = 2x \text{ و } |x-1| = -(x-1) = 1-x$$

$$f(x) > g(x) \Rightarrow 5 - |x-1| > |2x| \Rightarrow 5 - (1-x) > 2x \Rightarrow x+4 > 2x \Rightarrow x < 4 \xrightarrow{0 \leq x \leq 1} x \in [0, 1]$$

$$۳) \quad x > 1 \Rightarrow |2x| = 2x \text{ و } |x-1| = x-1$$

$$f(x) > g(x) \Rightarrow 5 - |x-1| > 2x \Rightarrow 5 - (x-1) > 2x \Rightarrow 5 - x + 1 > 2x \Rightarrow 3x < 6 \\ \Rightarrow x < 2 \xrightarrow{x > 1} x \in (1, 2)$$

بنابراین مجموعه جواب این نامعادله به صورت $\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$ درمی‌آید.