

جزوه تدریس

به سبک استاد علی داودوندی رتبه ۶۱ کنکور



برای استفاده بهتر از این جزوه ابتدا ویدیو مربوط به این مبحث را در آپارات یا یوتیوب مشاهده کنید. حتی اگر بخش کوچکی از این مبحث رو مدنظر دارید ببینید از روی **تایم لاین** های مشخص شده میتوانید آن را پیدا کنید.

 ALIDAVOODVANDI.IR

 [ALI.DAVOODVANDI](https://www.instagram.com/ALI.DAVOODVANDI)

 [ALI_DAVOODVANDI](https://www.youtube.com/ALI_DAVOODVANDI)

 [ALI_DAVOODVANDI](https://www.tiktok.com/ALI_DAVOODVANDI)

 ۰۹۳۸۳۱۶۵۳۵۴

 [ALI_DAVOODVANDI](https://www.telegram.me/ALI_DAVOODVANDI)



تابع

نکات تشخیص تابع

۱- تابع زوج مرتبی: اگر یک رابطه به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب داده شود، در صورتی تابع است که هیچ دو زوج مرتبی دارای مؤلفه اول یکسان نباشد. [یعنی اگر دو زوج مرتب، دارای مؤلفه اول یکسان باشند، باید مؤلفه دوم آنها نیز یکسان باشند.]

تست) اگر مجموعه $A = \{(3-2a, b+3), (a+3b, a)\}$ ، نمایش فقط یک نقطه در صفحه مختصات باشد، آنگاه حاصل $a^2 + b^2$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$\frac{5}{2} \quad (3)$$

$$10 \quad (2)$$

$$5 \quad (1)$$

.....

.....

.....

.....

تست) رابطه $f = \{(5, a^2), (2, 3), (-5, a), (3, a), (5, a+2), (a, 4)\}$ به ازای چند مقدار a ، یک تابع است؟

$$4 \text{ بی شمار}$$

$$3 \text{ دو}$$

$$2 \text{ یک}$$

$$1 \text{ هیچ مقدار}$$

.....

.....

.....

.....





(تست) حداقل چند عضو از مجموعه $f = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, x = \frac{y^2}{y^2 - 1}\}$ حذف شود تا f ، یک تابع باشد؟

(کنکور ۱۴۰۲)

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

.....

.....

.....

.....

(تست) اگر $f = \{(1, x - 2y), (2, 3), (9, 5), (1, -7), (9, x + y)\}$ یک تابع باشد، مقدار $x^2 + y^2$ چند برابر $-x - 4y$

(انسانی - داخل ۱۴۰۱)

است؟

-۲ (۴)

-۱ (۳)

۱ (۲)

۲ (۱)

.....

.....

.....

.....

۲- تابع چند ضابطه‌ای: یک رابطه چند ضابطه‌ای مانند $f(x) = \begin{cases} g(x); & x \geq a \\ h(x); & x \leq a \end{cases}$ در صورتی تابع است که:

• خود ضابطه‌ها یعنی $h(x), g(x)$ تابع باشند.

• $g(a) = h(a)$ باشد.



تست) اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 3} + 2a & |x| \leq 1 \\ ax^2 + 5 & |x| \geq 1 \end{cases}$ ، ضابطه تابع f باشد، مقدار $f(a)$ کدام است؟ (کنکور اردیبهشت

(۱۴۰۳

۱۴ (۴

۲۵ (۳

۳۲ (۲

۴۶ (۱

.....

.....

.....

.....

تست) هرگاه $f(x) = \begin{cases} ax + b & x \leq -2 \\ 3x^2 + 2x + 1 & -2 \leq x \leq 1 \\ x^3 + ax^2 - bx & x \geq 1 \end{cases}$ یک تابع را مشخص کند، مقدار $a + b$ کدام است؟

-۳۳ (۴

۳۳ (۳

-۲۲ (۲

۲۲ (۱

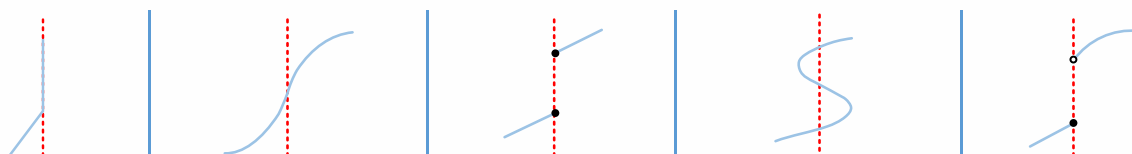
.....

.....

.....

.....

۳- تابع به صورت نموداری: در نمودار تابع هر خط عمودی دلخواه، باید آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.



تابع نیست

تابع است

تابع نیست

تابع نیست

تابع است

۴- تابع پیکانی: اگر یک رابطه به صورت نمودار پیکانی داده شود، در صورتی تابع است که از هر عضو مجموعه

اول، دقیقاً یک پیکان [نه بیشتر، نه کمتر خارج] شود. [اگر گفته شود یک نمودار پیکانی تابع است ولی از

یک عضو مجموعه اول دو پیکان خارج شود و به اعداد و Δ وصل شود، الزاماً باید $\Delta = \emptyset$ باشد.]

توجه ۱: اگر از یک عضو پیکانی خارج نشود آن رابطه تابع نیست.

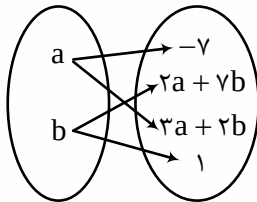




توجه ۲: اگر به یک یا چند عضو از مجموعه دوم پیکانی وارد نشود یا چند پیکان به یک عضو وارد شود، خلی در تابع بودن ایجاد نمی‌شود.

(کتاب درسی)

تست) اگر نمودار مقابل یک تابع باشد، حاصل $a^2 + b^2$ کدام است؟



۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

.....

.....

.....

.....

۵- تابع به صورت فرمولی: برای تشخیص تابع بودن رابطه‌هایی که به صورت فرمولی و ضابطه بیان می‌شوند، می‌توان از مثال نقض استفاده کرد، یعنی اگر به ازای یک x ، بیش از یک مقدار برای y به دست آمد، آن رابطه تابع نیست. [در واقع رابطه‌ای تابع است که بتوان y را برحسب x و به صورت $y = f(x)$ نشان داد و منظور از $f(x)$ یک رابطه بر حسب ورودی است.]

نکته ۱: اگر $a \neq 0$ و $f(ax+b) = a'x + b'$ باشد، آنگاه $f(x)$ یک تابع است و به طور کلی اگر $g(x)$ یک تابع باشد، و $f(ax+b) = g(x)$ آنگاه $f(x)$ هم تابع است.

نکته ۲: معمولاً رابطه‌هایی که در آن y دارای توان زوج یا قدر مطلق یا جزء صحیح باشد، مشکوک به تابع نبودن هستند، اما باز هم نیاز به بررسی دارد. مثلاً رابطه $x^2 + y^2 = 0$ تابع است، چون این رابطه تنها شامل یک نقطه $(0,0)$ است.



تست) چه تعداد از رابطه‌های زیر تابع هستند؟

- الف) $|x| + |y| = -2$ (ب) $\sqrt{x} = -|y|$ (پ) $\sqrt{x} + y = 2$ (ت) $x + y^2 = 5$
- یک (۱) دو (۲) سه (۳) چهار (۴)

.....

.....

.....

.....

تست) در کدام یک از گزینه‌های زیر، نمی‌توان نتیجه گرفت $f(x)$ الزاماً یک تابع است؟

- ۱) $f(4x+3) = 2x+3$ ۲) $f(x^3+1) = x^3+2$
- ۳) $f([x]) = x$ ۴) $f(|x|) = x^2+3$

.....

.....

.....

.....

نکته ۳: اگر مجموعه A دارای m عضو و مجموعه B دارای n عضو باشند، تعداد n^m تابع از A به B می‌توان تعریف کرد.

تست) مجموعه‌های $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{1, 2\}$ داده شده‌اند. چند تابع از مجموعه A به مجموعه B قابل تعریف است؟

- ۶ (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

.....

.....

.....

.....



تست) کدام رابطه زیر یک تابع است؟

- (۱) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشه چهارم آن را نسبت می‌دهد.
- (۲) رابطه‌ای که به هر نویسنده، کتاب‌های او را نسبت می‌دهد.
- (۳) رابطه‌ای که به هر عدد، مضارب زوج آن را نسبت می‌دهد.
- (۴) رابطه‌ای که به هر کتاب، قیمتش را نسبت می‌دهد.

.....

.....

.....

.....

تست) چه تعداد از ضابطه‌های زیر، y را به عنوان تابعی از x تعریف می‌کنند؟

$$x = \begin{cases} 2y & ; y > 1 \\ y+3 & ; y \leq 1 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$x = \sqrt{y-2} + \sqrt{2-y} \quad (\text{الف})$$

$$y = \begin{cases} x+1 & ; x \geq 2 \\ 3x & ; x \leq 2 \end{cases} \quad (\text{ج})$$

(۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) سه

گزینه ۲- ضابطه‌هایی تابع هستند که به ازای هر مقدار x ، تنها یک مقدار برای y بدهند. در تشخیص این که یک ضابطه تابع باشد یا نه، گاهی بهتر است از رسم کمک بگیریم یا این که به نحو خوبی عددگذاری کنیم.

(الف) $x = \sqrt{y-2} + \sqrt{2-y}$: در این جا به علت وجود عبارت $\sqrt{y-2}$ باید $y \geq 2$ باشد. اما چون $\sqrt{2-y}$ هم داریم، پس باید $y \leq 2$. از این دو شرط به دست آمده می‌فهمیم که باید $y = 2$ باشد. پس:

$$y = 2 \Rightarrow x = \sqrt{0} + \sqrt{0} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 2)$$

این ضابطه فقط همین یک نقطه $(0, 2)$ است. لذا تابع است. ✓

(ب) با قرار دادن $x = 4$ در این رابطه به دو مقدار می‌رسیم: $y = 2$ از ضابطه بالا و $y = 1$ از ضابطه پایین پس هم $(4, 2)$ و هم $(4, 1)$ در این ضابطه صدق می‌کند. لذا این ضابطه یک تابع نیست. ✗

(ج) ضابطه‌های بالا و پایین تابع هستند.

اما باید نقطه مرزی $x = 2$ را بررسی کنیم:

$$\text{✗ تابع نیست} \Rightarrow 3 \neq 6 \Rightarrow f(2) = 6 : \text{ضابطه پایین} \quad f(2) = 3 : \text{ضابطه بالا}$$





مقدار تابع در یک نقطه

۱- اگر تابعی به صورت $f(x) = \dots$ بود، برای پیدا کردن $f(u)$ ، عبارت $\dots$ به جای همه x ها، u را قرار می‌دهیم.

$$۱) f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3} \Rightarrow f(2) = \sqrt[3]{2^2 + 3} = \sqrt[3]{7}$$

$$۲) f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f(x^2 - 1) = (x^2 - 1) + \frac{1}{(x^2 - 1)}$$

$$۳) f(x) = x^3 + 2x + 1 \Rightarrow f(\Delta) = \Delta^3 + 2\Delta + 1$$

مثال: اگر $f(2x+3)$ را داشته باشیم و $f(9)$ را بخواهیم، باید مقداری از x را پیدا کنیم که به ازای آن $2x+3=9$

$$2x+3=9 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3$$

شود، یعنی:

حال در طرف دوم، هر جا x دیدیم به جای آن ۳ می‌گذاریم.

$$f\left(\frac{x}{2} + 1\right) = \frac{2x-1}{x} \Rightarrow f(5) = ?$$

پاسخ:

$$\frac{x}{2} + 1 = 5 \Rightarrow \frac{x}{2} = 4 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow f(5) = \frac{2 \times 8 - 1}{8} = \frac{15}{8}$$

نکته: اگر نمودار تابع f را به ما بدهند، منظور از $f(a)$ عرض نقطه‌ای روی نمودار تابع f است که طول آن برابر

a باشد.

تست) در تابع $g(x) = 3x - 4$ اگر $g(x-2) = 0$ باشد، آنگاه مقدار x کدام است؟

$$\frac{8}{3} \quad (۴)$$

$$۲ \quad (۳)$$

$$\frac{4}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۱)$$

.....

.....

.....

.....



تست) اگر $f(4x-1) = x^2 + 2\sqrt{x}$ باشد، مقدار $f(3)$ کدام است؟

۳ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

.....

.....

.....

.....

تست) اگر $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 5}{x^2 + 4x + 7}$ باشد، مقدار $f(\sqrt{3} - 2)$ کدام است؟

 $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{5}{7}$ (۱)

.....

.....

.....

.....

تست) در تابع f با ضابطه $f(x) = ax^2 + bx + c$ داریم $f(0) = -1$ ، $f(1) = 0$ و $f(2) = 3$. در این صورت مقدار

$f(-2)$ کدام است؟

۳ (۴)

-۵ (۳)

۲ (۲)

۴ (۱)

.....

.....

.....

.....



تست) اگر $f(x) = f(x-1) - 2f(x-2)$ باشد و داشته باشیم $f(0) = 1$ و $f(-1) = -1$ ، آنگاه مقدار $f(3)$ کدام است؟

۲ (۴

۵ (۳

صفر (۲

-۵ (۱

.....

.....

.....

.....

تست) اگر $xf(3) + 2f(x) = x^2 + 6$ باشد، مقدار $f(5)$ کدام است؟

۸ (۴

-۵ (۳

۱۵ (۲

۳ (۱

.....

.....

.....

.....

تست) هرگاه $f(x + f(x)) = 3f(x)$ و $f(-1) = 7$ باشد، مقدار $f(27)$ کدام است؟

۷۲ (۴

۶۳ (۳

۴۸ (۲

۸۱ (۱

.....

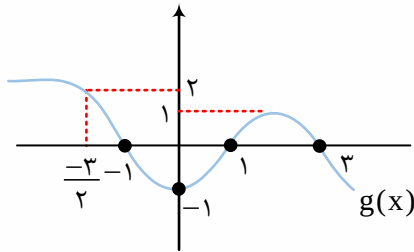
.....

.....

.....

تست) اگر $f = \{(1, -2), (-2, 3), (2, -1), (3, 4)\}$ و نمودار تابع g مطابق شکل باشد، حاصل $\frac{f(3) + g(-4)}{f(-2) + g(3)}$ کدام

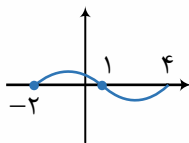
است؟ $(D_g = \mathbb{R})$



پاسخ: در تابع f داریم $f(-2) = 3$ و $f(3) = 4$ حال نقاط $(3, 0), (-4, 2)$ روی نمودار تابع g قرار دارند، پس:

$$g(-4) = 2, g(3) = 0 \Rightarrow \frac{f(3) + g(-4)}{f(-2) + g(3)} = \frac{4 + 2}{3 + 0} = \frac{6}{3} = 2$$

تست) نمودار تابع $y = f(2x - 1)$ به صورت مقابل است. مجموع ریشه‌های تابع $f(x + 1)$ کدام است؟



۳ (۴

-۶ (۳

۶ (۲

۱) صفر

.....

.....

.....

.....

۲- تعیین ضابطه تابع:

حالت ۱: $f(x)$ را می‌دهند و f (چیز) را می‌خواهند:

باید در معادله $f(x)$ به جای x ها «چیز» را جای‌گذاری کنیم. (اگر تابع شرطی هم داشت، باید حتماً در آن

شرط نیز این کار را انجام دهیم)



حالت ۲: (چیز) f را می‌دهند و $f(x)$ را می‌خواهند:

با تغییر متغیر « t = چیز» به جای x ها در رابطه (چیز) f ، x به دست آمده بر حسب t را قرار می‌دهیم تا $f(t)$ تعیین شود.

حالت ۳: (چیز) f را می‌دهند و (چیز دیگر) f را می‌خواهند:

ابتدا مانند تیپ ۲ از (چیز) f به $f(x)$ می‌رسیم و در نهایت به جای x ها در $f(x)$ ، «چیز دیگر» را قرار می‌دهیم.

حواست باشه!

بهترین روش برای حل تست‌های تعیین ضابطه عددگذاری است که در حل تست‌ها بیش‌تر با آن آشنا می‌شوید.

تست) اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ باشد، حاصل $f(x^2) - 2f(x) + 1$ کدام است؟

$$\frac{2x-1}{x^2-1} \quad (۴)$$

$$\frac{2x+1}{1-x^2} \quad (۳)$$

$$\frac{2x}{x^2-1} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{1-x^2} \quad (۱)$$

.....

.....

.....

.....

تست: در تابع $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+4} & ; x > 3 \\ 2x+3 & ; x \leq 3 \end{cases}$ مقدار $f(f(5)) + f(f(1))$ کدام است؟ (تجربی داخل - ۹۰)

$$۹ \quad (۴)$$

$$۸ \quad (۳)$$

$$۷ \quad (۲)$$

$$۶ \quad (۱)$$

گزینه (۴) - فقط کافیت ببینیم مقدار ورودی تابع، مربوط به کدام ضابطه آن است:

$$۵ > 3 \Rightarrow f(5) = 5 - \sqrt{5+4} = 5 - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2$$

$$\Rightarrow f(f(5)) = f(2) \xrightarrow{2 < 3} f(f(5)) = 2(2) + 3 = 7$$

$$1 < 3 \Rightarrow f(1) = 2(1) + 3 = 5 \Rightarrow f(f(1)) = f(5) = 2$$

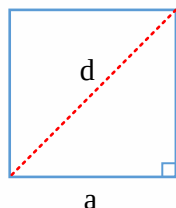
بنابراین $f(f(5)) + f(f(1)) = 7 + 2 = 9$ خواهد بود.



تشکیل ضابطه تابع

۱- اگر بخواهیم محیط، مساحت، حجم و ... از یک شکل هندسی را بر حسب تابعی از یک متغیر بیان کنیم با توجه به شکل مسئله، همه متغیرهای به کار رفته در مسئله را بر حسب متغیر خواسته شده به دست می آوریم و سپس در فرمول خواسته شده جایگزین می کنیم:

مثال: اگر بخواهیم مساحت یک مربع به ضلع a و قطر d را بر حسب d بیان کنیم، به صورت زیر عمل می کنیم:



$$a^2 + a^2 = d^2 \Rightarrow 2a^2 = d^2 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{2}d^2$$

$$a \Rightarrow S = a^2 = \frac{1}{2}d^2$$

نکته ۱: فاصله دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ برابر است با:

$$|AB| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

معادله خط:

نکته ۲: فرمول حجم شکل های مهم:

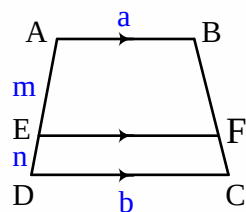
۲- حجم مخروط: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

۱- حجم کره: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

۴) حجم مکعب: $V = abc$

۳- حجم استوانه: $V = \pi r^2 h$

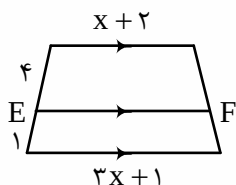
نکته ۳: ویژگی بسیار مهمی که باید از دوزنقه بدانیم، این است:



$$EF = \frac{an + bm}{n + m} \xrightarrow[\text{حالت خاص } m=n]{\text{}} EF = \frac{a + b}{2}$$



تست) در دوزنقه شکل مقابل، تابع $f(x)$ برابر با اندازه EF تعریف می‌شود. ضابطه $f(x)$ کدام است؟



$f(x) = \frac{5}{x+11}$ (۴)
 $f(x) = \frac{7x+11}{5}$ (۳)
 $f(x) = \frac{13x+6}{5}$ (۲)
 $f(x) = \frac{13}{x+6}$ (۱)

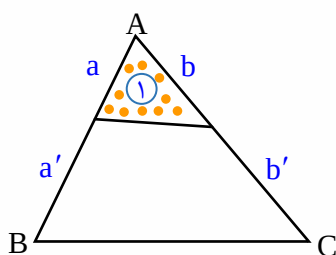
.....

.....

.....

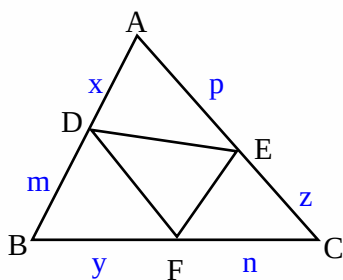
.....

نکته ۴: در شکل مقابل، نسبت مساحت ناحیه (۱) به مساحت کل مثلث برابر است با:



$$\frac{S_1}{S_{\text{کل}}} = \frac{a}{a+a'} \times \frac{b}{b+b'}$$

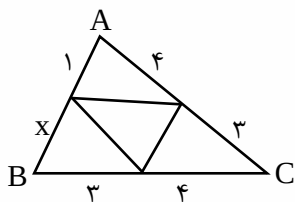
نکته ۵: اگر دو مثلث درون هم محاط شده باشند، نسبت به مساحت آنها به صورت زیر است:



$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{xyz + mnp}{abc}$$



تست) در شکل مقابل، تابعی که نسبت مساحت ناحیه رنگی به مساحت مثلث ABC را محاسبه می‌کند،



کدام است؟

$$f(x) = \frac{3x+4}{7x+7} \quad (۴) \quad f(x) = 1 - \frac{12}{49}x \quad (۳) \quad f(x) = 1 - \frac{12}{49}(x+1) \quad (۲۵) \quad f(x) = \frac{16x+9}{49(x+1)} \quad (۱)$$

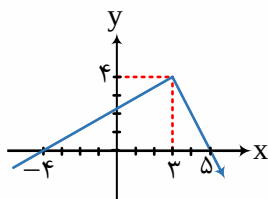
.....

.....

.....

.....

تست) نمودار تابع f به صورت شکل زیر است. ضابطه تابع f کدام است؟



$$f(x) = -4(x+4) \quad (۲)$$

$$f(x) = \frac{4}{5}(x+4) \quad (۱)$$

$$f(x) = \begin{cases} -4(x+4) & x \leq 3 \\ -2x+10 & x > 3 \end{cases} \quad (۴)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{5}(x+4) & x < 3 \\ -2x+10 & x \geq 3 \end{cases} \quad (۳)$$

.....

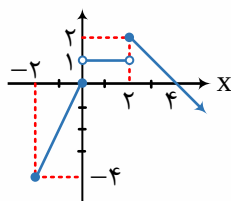
.....

.....

.....



تست) نمودار تابع قطعه‌ای f به صورت شکل مقابل داده شده است. ضابطه آن کدام است؟ (کتاب درسی)



$$f(x) = \begin{cases} 2x & -2 \leq x \leq 0 \\ 1 & 0 < x < 2 \\ 4x - 1 & x \geq 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & -2 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 2 \\ 4 - x & x > 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x & -2 \leq x \leq 0 \\ 1 & 0 < x < 2 \\ 2x & x \geq 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & -2 \leq x \leq 0 \\ 1 & 0 < x < 2 \\ 4 + x & x \geq 2 \end{cases} \quad (3)$$

.....

.....

.....

.....

تست) حجم استوانه محاط در کره‌ای به شعاع ۶، بر حسب ارتفاع استوانه، کدام است؟

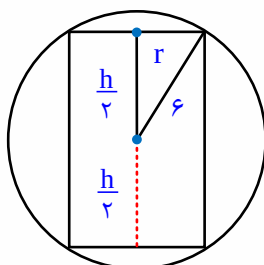
$$f(h) = \pi(6h + h^2) \quad (2)$$

$$f(h) = \pi(6h - h^2) \quad (1)$$

$$f(h) = \pi(6h + h^3) \quad (4)$$

$$f(h) = \pi\left(36h - \frac{h^3}{4}\right) \quad (3)$$

گزینه (۳) - شکل استوانه و کره در حالت دو بعدی به صورت مقابل است. بنا به قضیه فیثاغورس



می‌دانیم که حجم استوانه برابر با $V = \pi r^2 h$ است. $\frac{h^2}{4} + r^2 = 36$ است.

$$f(h) = \pi r^2 h = \pi\left(36 - \frac{h^2}{4}\right)h = \pi\left(36h - \frac{h^3}{4}\right)$$

بنابراین:

دامنه تابع

به مجموعه ورودی‌های تابع f ، دامنه تابع f می‌گویند و آن را با D_f نشان می‌دهند.

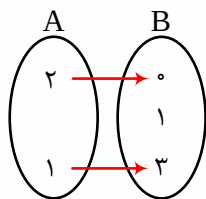
۱- اگر تابع به صورت زوج مرتبی داده شود، دامنه تابع عبارت است از مجموعه همه مولفه‌های اول.

مثال: دامنه تابع $f = \{(3, 2), (4, 1), (5, 6)\}$ کدام است؟

$$D_f = \{3, 4, 5\}$$

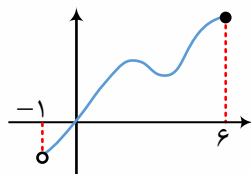
پاسخ: مجموعه مؤلفه‌های اول عبارت است از:

۲- اگر تابع به صورت نمودار پیکانی داده شود یعنی $f: A \rightarrow B$ تعریف شده باشد، آنگاه $D_f = A$ است.



مثال: دامنه تابع عبارت است از $D_f = \{2, 1\}$

۳- اگر تابع به صورت نموداری داده شود، دامنه تابع عبارت است از تصویر نمودار روی محور x ها.



مثال: دامنه تابع شکل مقابل کدام است؟

پاسخ: تصویر تابع روی محور x ها عبارت است از $D_f = (-1, 6]$

۳- اگر ضابطه یک تابع به صورت $y = f(x)$ داده شود، برای تعیین دامنه، به موارد زیر توجه کنید:

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + cx + d \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

۱- دامنه توابع چند جمله‌ای برابر $\mathbb{R}$ است:

$$y = \frac{A(x)}{B(x)} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{x : B(x) = 0\}$$

۲- دامنه توابع کسری کل $\mathbb{R}$ به جز ریشه‌های مخرج است:

۳- در توابع رادیکالی با فرجه زوج، باید عبارت زیر رادیکال بزرگتر مساوی صفر باشد:

$$y = \sqrt{A(x)} \Rightarrow D_f = \{x : A(x) \geq 0\}$$

۴- در توابع لگاریتمی، باید جلوی لگاریتم و همچنین مبنای لگاریتم مثبت باشند و همچنین مبنای لگاریتم

مخالف ۱ باشد:

$$y = \log_{B(x)} A(x) \Rightarrow D_f = \{x : A(x) > 0, B(x) > 0, B(x) \neq 1\}$$

نکته ۱: در توابع چند ضابطه‌ای، باید ابتدا دامنه هر ضابطه را به دست آورد و سپس بین جواب‌ها، اجتماع

بگیریم. [البته درون هر ضابطه دامنه را باید با بازه‌ای که آن ضابطه در آن تعریف شده اشتراک گرفت]



نکته ۲: اگر دامنه $f(ax+b)$ را داشته باشیم و بخواهیم دامنه $f(cx+d)$ را پیدا کنیم، ابتدا محدوده $ax+b$ را از روی دامنه داده شده پیدا می‌کنیم آن گاه $cx+d$ را بین حدود به دست آمده قرار داده و حدود x را پیدا می‌کنیم این محدوده دامنه $f(cx+d)$ است.

مثال: اگر دامنه $f(2x+1)$ به صورت $[2, 5]$ باشد، برای پیدا کردن دامنه $f(3x-2)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$1) \quad 2 \leq x \leq 5 \Rightarrow \underbrace{5 \leq 2x+1 \leq 11}_{D_f=[5,11]} \quad 2) \quad 5 \leq 3x-2 \leq 11 \Rightarrow \frac{7}{3} \leq x \leq \frac{13}{3}$$

بنابراین دامنه $f(3x-2)$ به صورت $[\frac{7}{3}, \frac{13}{3}]$ است.

نتیجه: اگر دامنه $f(x)$ به صورت $[x_1, x_2]$ باشد، برای پیدا کردن دامنه $f(cx+d)$ باید نامعادله $x_1 \leq cx+d \leq x_2$ را حل کنیم و حدود x را به دست آوریم.

تست) اگر دامنه تابع $f = \{(3, -1), (2a+1, -1), (4b-5, a^2-2)\}$ تک‌عضوی باشد، آنگاه حاصل ab کدام است؟

۴) -۲

۳) ۳

۲) ۲

۱) -۳

.....

.....

.....

.....

تست) دامنه تابع $y = \sqrt{4-|x-1|}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۴) ۹

۳) ۸

۲) ۷

۱) ۵

.....

.....

.....

.....



تست) دامنه تابع $f(x) = \frac{x}{2x^2 + ax + b}$ به صورت $\mathbb{R} - \{a+1, 3\}$ است. دامنه تابع $g(x) = \frac{x+1}{x^2 + 3ax + b+1}$

کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R} - \{4, -3\}$ (۲) $\mathbb{R} - \{-9, 3\}$ (۳) $\mathbb{R} - \{-1, 9\}$ (۴) $\mathbb{R} - \{6, 3\}$

.....

.....

.....

.....

تست) اگر دامنه تابع $f(x) = \sqrt{3+ax-x^2}$ بازه $[-2, b]$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{5}{2}$

.....

.....

.....

.....

تست) دامنه تابع $y = \log_2(4x - x^2)$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی شمار

.....

.....

.....

.....



(تجربی - دی ۱۴۰۱)

تست) دامنه $f(x) = \sqrt{\frac{x}{\log_{\frac{1}{2}} x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۳ (۴

۲ (۳

۱ (۲

صفر (۱

.....

.....

.....

.....

(تجربی - داخل ۱۴۰۰)

تست) دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\log_4(x^2 - x - 2)}{\sqrt{x^2 - 1} + 1}$ کدام است؟

(۱) $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ (۲) $(-1, 2)$

(۴) $(-2, 1)$

(۳) $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

.....

.....

.....

.....

(کنکور ۹۲)

تست) اگر $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ ، دامنه تابع $y = f(3 - x)$ کدام است؟

(۴) $[1, 3]$

(۳) $[1, 2]$

(۲) $[0, 3]$

(۱) $[0, 2]$

.....

.....

.....

.....



رتبه ۱ کنکور

(تست) اگر دامنه تابع $f(x) = \sqrt{ax^2 - 8x + a}$ فقط شامل یک عدد حقیقی باشد، آن عدد کدام است؟

(۴) -۱

(۳) -۴

(۲) ۱

(۱) ۴

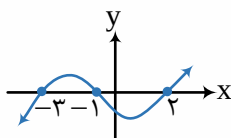
.....

.....

.....

.....

(تست) شکل مقابل، نمودار تابع است. دامنه تابع $y = \sqrt{(x+1)f(x)}$ کدام است؟ (خارج ۹۷)



(۴) $\mathbb{R} - (-3, 2) \cup \{-1\}$

(۲) $[-1, +\infty)$

(۱) $[-3, 2]$

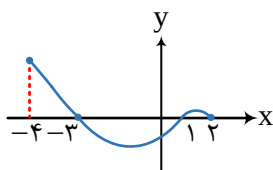
.....

.....

.....

.....

(تست) شکل مقابل، نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ کدام است؟



(۴) $[-3, 0] \cup [1, 2]$

(۳) $[-4, -3] \cup [1, 2]$

(۲) $[-3, 2]$

(۱) $[0, 2]$

.....

.....

.....

.....





تست) دامنه تعریف تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\log x}} + \frac{1}{\sqrt{3-x}}$ کدام است؟

(۱, ۳) (۲)

(۱, ۳) (۱)

$(-\infty, 1] \cup (3, +\infty)$ (۴)

$(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ (۳)

گزینه (۱) - در مخرج کسرها رادیکال با فرجه زوج داریم، پس عبارات زیر رادیکالها باید همواره مثبت باشند:

۱) $3-x > 0 \Rightarrow x < 3$
 ۲) $\log x > 0 \Rightarrow x > 1$

برد تابع

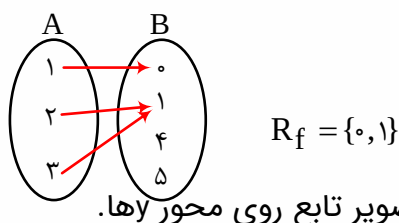
به مجموعه خروجی‌هایی که از قرار دادن عضوهای دامنه در تابع f به دست می‌آید، برد تابع f می‌گویند و با D_f نشان می‌دهند.

۱- اگر تابع f به صورت زوج مرتبی داده شود، برد تابع عبارت است از مجموعه همه مولفه‌های دوم

مثال: برد تابع $\{(2, 3), (0, 5), (1, 6)\}$ کدام است؟

پاسخ: برد تابع f عبارت است از مجموعه همه مختص‌های دوم یعنی: $R_f = \{3, 5, 6\}$

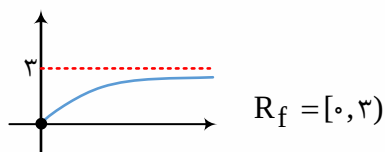
۲- اگر تابع f به صورت پیکانی یعنی $f: A \rightarrow B$ داده شود، برد f زیر مجموعه‌ای از B است که به آن اعضا پیکانی وارد شده باشد.



مثال: در نمودار پیکانی مقابل برد تابع f کدام است؟

پاسخ: چون همه فلش‌ها به ۰ و ۱ وارد شده پس:

۳- اگر تابع f به صورت نموداری داده شود، برد تابع f عبارت است از تصویر تابع روی محور y ها.



مثال: در نمودار مقابل، برد تابع f کدام است؟

پاسخ: تصویر تابع روی محور y ها عبارت است از:

نکته ۱: در توابع صعودی، نزولی، اکیداً صعودی و اکیداً نزولی مانند توابع جدول زیر، اگر طراح بازه بدهد، برد را به کمک عددگذاری ابتدا و انتهای بازه به دست می‌آوریم:

یافتن برد به کمک عددگذاری در بازه‌های محدود

$y = a\sqrt[n]{cx+d} + b$	$y = ax + b$
$y = \log_a(cx+d)$	$y = \log_a x$
$y = \log_x a$	$y = a^x$
$y = (ax+b) ax+b $	$y = ax^{2n+1} + b$

نکته ۲: برد تابع $\sqrt[n]{ax+b}$ برابر $[0, \infty)$ است. اما برد تابع $\sqrt[n+1]{ax+b}$ برابر $\mathbb{R}$ است.

نکته ۳: برای محاسبه برد توابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ به این صورت عمل می‌کنیم:

۱- مختصات رأس را به دست می‌آوریم: $S(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$

۲- اگر $a > 0$ باشد، برد عبارت است از: $R_f = [-\frac{\Delta}{4a}, +\infty)$ }
 اگر $a < 0$ باشد، برد عبارت است از: $R_f = (-\infty, -\frac{\Delta}{4a}]$ }

۳- اگر طراح بازه داد، باید ابتدا و انتهای بازه را عددگذاری کنیم. به علاوه چک کنیم و ببینیم که $x_s = -\frac{b}{2a}$ در بازه قرار دارد یا نه. اگر قرار داشت باید آن را هم عددگذاری کنیم (اگر نبود هم کاری نمی‌کنیم) سه عدد به دست می‌آید. برد ما بازه کوچک‌ترین تا بزرگ‌ترین این اعداد است.

نکته ۴: در یافتن برد تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ به نکات زیر توجه کنید:

I- اگر طراح هیچ بازه‌ای ندهد و هیچ شرطی اعمال نکند، برابر $\mathbb{R} - \{\frac{a}{c}\}$ است.

II- اگر طراح به هر نحوی اعدادی مانند $x = x_1, x_2, \dots$ را از دامنه حذف کند، آنگاه ما باید $f(x_1), f(x_2), \dots$ را

از برد حذف کنیم. یعنی: $R_f = \mathbb{R} - \{\frac{a}{c}, f(x_1), f(x_2), \dots\}$

III- اگر طراح بازه بدهد، مثلاً $m < x < n$ ، آنگاه دو حالت داریم:

۱- $-\frac{d}{c} \notin (m, n)$: در این حالت برد با عددگذاری ابتدا و انتهای دامنه به دست می‌آید.



۲- $-\frac{d}{c} \in (m, n)$: در این حالت بعد از این که ابتدا و انتهای بازه را عددگذاری کردیم، باید از جواب به دست آمده هم متمم بگیریم.

نکته ۵: در تابع $f(x) = ax + b \pm |cx + d|$ برای یافتن برد باید ضریب قدر مطلق را با شیب خط مقایسه کنیم، یعنی:

۱- اگر $|a| > |c|$ باشد، یعنی زور ضریب x بیرون، بیشتر باشد قدر مطلق نمی‌تواند نمودار را خم کند و نمودار اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است و برد تابع $f(x)$ برابر $\mathbb{R}$ است.

۲- اگر $|a| \leq |c|$ باشد، یعنی زور ضریب قدر مطلق بیشتر باشد، نمودار از جنس قدر مطلق می‌شود و در این حالت برد تابع $f(x)$ را به کمک عددگذاری ریشه قدر مطلق و علامت پشت قدر مطلق پیدا می‌کنیم. [اگر پشت قدر مطلق مثبت نمودار به صورتی هفتی و اگر منفی باشد نمودار به صورت هشتی است].

نکته ۶: برد توابع به فرم $y = \frac{kx}{x^2 + 1}$ همواره برابر $[-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}]$ می‌باشد.

نکته ۷: برد تابع $f(x)$ با برد تابع $f(ax + b)$ و تابع $f(a'x + b')$ یکسان است.

حواست باشه!

۱- در عددگذاری بی‌نهایت حواستان باشد که بزرگ‌ترین توان بی‌نهایت، تنها عدد مهم در عملیات است. مثلاً

$$-\infty^3 + 894\infty^2 + 11\infty + 6 = -\infty$$

زیرا بزرگ‌ترین توان ∞ منفی است. به چند مثال زیر توجه کنید:

$$۱) 3\infty^2 + 8\infty - 19 = \infty$$

$$۲) -2\infty^2 + 111\infty + 17 = -\infty$$

$$۳) \infty^2 - \infty^3 = -\infty$$

اما اگر بخواهیم در کسر $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ مقدار $x = \infty$ را قرار دهیم حاصل $\frac{a}{c}$ می‌شود. این نکات در محاسبه برد خیلی مفید هستند.



۲- در توابع چند ضابطه‌ای برد تک تک ضابطه‌ها را به دست می‌آوریم و اجتماع می‌گیریم.

۳- همان طور که گفتیم، برد توابع یکنوا (صعودی یا نزولی) با عددگذاری اول و آخر دامنه‌شان انجام می‌شود.

در ضمن تفاضل دو تابع صعودی و نزولی همیشه از جنس تابع اول است. به عنوان مثال: **نزولی = صعودی**

- نزولی

۴- دقت کنید که در محاسبه برد، اگر به عددی دو بار رسیدیم، یک بار توخالی و یک بار توپر بود، اولویت با

توپر است.

۵- اگر $R_{g(x)} = [0, \infty) \subseteq R_{g(x)}$ باشد، آنگاه: $R_{\sqrt{g(x)}} = [0, \infty)$

۶- اگر a و b مثبت باشند و $R_{g(x)} = (a, b)$ باشد، آنگاه: $R_{\sqrt{g(x)}} = (\sqrt{a}, \sqrt{b})$

تست) برد تابع $y = 2^x + 4$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $(0, +\infty)$ ۳) $(4, +\infty)$ ۴) $(0, 4)$

.....

.....

.....

.....

تست) اگر $-1 < x \leq 3$ ؛ $f(x+1) = 2x-1$ باشد، برد تابع $g(x) = 2f(1-x) + 3x$ کدام است؟

۱) $(-3, 1]$ ۲) $(-2, 1]$ ۳) $(-3, 1)$ ۴) $(-9, 19]$

.....

.....

.....

.....





تست) برد تابع $f(x) = 3\sqrt{x-2} + 5$ کدام است؟

(۴) $[8, +\infty)$

(۳) $[5, +\infty)$

(۲) $[-\infty, 8]$

(۱) $[2, +\infty)$

.....

.....

.....

.....

تست) برد تابع $f(x) = \frac{3x+2}{2x+4}$ کدام است؟

(۴) $\mathbb{R} - \{\frac{3}{2}\}$

(۳) $\mathbb{R} - \{-\frac{2}{3}\}$

(۲) $\mathbb{R} - \{-2\}$

(۱) $\mathbb{R}$

.....

.....

.....

.....

تست) اگر برد تابع $f(x) = \sqrt[3]{9\cos^2 x - 1} - \sqrt[3]{1 - 9\cos^2 x}$ به صورت $[a, b]$ باشد، مقدار $b - a$ کدام است؟

(ریاضی - داخل ۱۴۰۰)

(۴) $\frac{21}{4}$

(۳) $\frac{9}{2}$

(۲) $\frac{15}{4}$

(۱) $\frac{9}{4}$

.....

.....

.....

.....



تست) برد تابع $f(x) = 3x - 2 | 2x - 6 | + 1$ کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R}$ (۲) $[10, +\infty)$ (۳) $(-\infty, 10]$ (۴) $[-10, 10]$

.....

.....

.....

.....

تست) برد تابع $f(x) = \sqrt{x-2+3|x-1|}$ کدام است؟

- (۱) $[1, +\infty)$ (۲) $[0, +\infty)$ (۳) $[0, \sqrt{5}]$ (۴) $[0, \sqrt{6}]$

.....

.....

.....

.....

تست) اگر برد تابع $f(x) = 3x - 2$ بازه $[-3, 2]$ باشد، دامنه این تابع کدام است؟

- (۱) $[-11, 4]$ (۲) $[-3, 2]$ (۳) $[-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}]$ (۴) $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}]$

.....

.....

.....

.....

تست: برد تابع $y = 3\sqrt{x+3} + 2$; $1 \leq x < 6$ کدام است؟

- (۱) $[1, 11)$ (۲) $[3, 6)$ (۳) $[2, +\infty)$ (۴) $[8, 11)$

گزینه (۴)- در این مسئله با تابع رادیکالی در یک بازه مواجه ایم، بنابراین برد آن را به کمک عددگذاری ابتدا و انتهای بازه حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f(1) &= 3\sqrt{4} + 2 = 8 \\ f(6) &= 3\sqrt{9} + 2 = 11 \end{aligned} \Rightarrow R_{f(x)} = [8, 11)$$





انواع تابع [همانی، ثابت، خطی و ...]

۱- **تابع ثابت:** تابعی که برد آن یک عضو دارد و به ازای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $f(x) = c$ تابع ثابت نامیده می‌شود. $(\forall x \in D_f \Rightarrow f(x) = c)$

۲- **تابع همانی:** تابعی که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $f(x) = x$ را تابع همانی می‌نامند. [این تابع تمام یا قسمتی از نیم‌ساز ربع‌های اول و سوم است]

۳- **تابع خطی:** هر تابع به شکل $f(x) = ax + b$ را تابع خطی می‌نامند.

۴- **تابع درجه ۲:** هر تابع به شکل $f(x) = ax^2 + bx + c$ با شرط $a \neq 0$ را تابع درجه ۲ می‌نامند.

۵- **تابع چند جمله‌ای درجه n:** هر تابع به شکل $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + c$ با شرط $a \neq 0$ را تابع چند جمله‌ای درجه n می‌نامند.

۶- **تابع گویا:** اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو چندجمله‌ای باشند، هر تابع به شکل $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ را تابع گویا می‌نامند.

۷- **تابع هموگرافیک:** هر تابع به صورت $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ که $ad - bc \neq 0$ را یک تابع هموگرافیک می‌نامند.

نکته ۱: اگر $f(x)$ تابعی همانی باشد، بعد از ساده‌سازی ضابطه‌اش باید به $f(x) = x$ برسد.

نکته ۲: اگر $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ تابع ثابت باشد، آنگاه $ad - bc \neq 0$ است و برعکس.

نکته ۳: برای این که تابع $f(x)$ ، تابعی خطی باشد، باید $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ مقداری ثابت باشد.

نکته ۴: اگر $f(x) = ax + b$ تابعی خطی باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$f(x_1) + f(x_2) = 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

نکته ۵: اگر $f(Ax + B) = Cx + D$ باشد، آنگاه خود $f(x)$ هم تابعی خطی است.



تست) اگر تابع $f = \{(1, 4), (2, a^3), (3, b^7)\}$ تابعی ثابت و تابع $g = \{(-2, c), (-3, d)\}$ تابعی همانی باشد، مقدار

$f(3) + g(-2)$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

.....

.....

.....

.....

تست) دو تابع $f(x) = b - 3ax$ و $g(x) = c - (3b - 3)x$ ثابت هستند. اگر $f + g = 5$ باشد، حاصل bc چقدر

(کنکور - تیر ۱۴۰۱)

است؟

۶ (۴)

۴ (۳)

-۴ (۲)

-۶ (۱)

.....

.....

.....

.....

تست) اگر در تابع خطی f ، $f(3) = 2$ و $f(2) = -1$ باشد، نمودار این تابع محور x ها را با کدام طول قطع

می‌کند؟

 $\frac{7}{3}$ (۴) $\frac{5}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{11}{3}$ (۱)

.....

.....

.....

.....





تست) تابع سود یک کارگاه تولیدی برابر $y = -400 + 80x$ است، که در آن x تعداد کالای تولیدی و y سود بر حسب دلار است. با تولید چندمین کالا، سوددهی آغاز می‌شود؟ (کتاب درسی)

(۱) کالای پنجم (۲) کالای ششم (۳) کالای چهارم (۴) کالای هفتم

.....

.....

.....

.....

تست) اگر $f(x) = (ax + 2)(b - x) - 7x^2$ ضابطه یک تابع ثابت باشد، برد تابع f کدام است؟ (خارج - تیر ۱۴۰۱)

(۱) $-\frac{2}{7}$ (۲) $\frac{2}{7}$ (۳) $-\frac{4}{7}$ (۴) $\frac{4}{7}$

.....

.....

.....

.....

تست) اگر $f(x) = (|a| - |b|)$ تابع همانی و $g(x) = (b^2 - 1)x + (a^2 + 1)c$ تابعی ثابت و $(f - g)(x) = x + 5$ باشند، چند مقدار برای ac وجود دارد؟ (انسانی - داخل ۱۴۰۱)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

.....

.....

.....

.....



تست) برای برخی مقادیر x ، زوج مرتب $(f(x) + f(-x), 3x^2 - 17x + 10)$ ، روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم قرار دارد. اگر تابع f همانی با دامنه $\mathbb{R}$ باشد، اختلاف مقادیر x کدام است؟ (انسانی - دی ۱۴۰۱)

$$\frac{17}{3} \quad (4)$$

$$\frac{13}{3} \quad (3)$$

$$\frac{10}{3} \quad (2)$$

$$\frac{7}{3} \quad (1)$$

.....

.....

.....

.....

تست) تابع f ، تابع ثابت و برای $m, n \in \mathbb{N}$ داریم $f(m) + f(n) = f(m)f(n)$. اگر دو زوج مرتب $(m^2 - 4m + 6, nf(n))$ و $(2n^2 - 7n + 1, -f(m))$ روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشند، مقدار $\left[\frac{mn}{5}\right]$ کدام است؟

(انسانی - داخل ۱۴۰۲)

$$1 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

.....

.....

.....

.....

تست) مساحت ناحیه محصور بین نمودارهای $y = 3x + 2$ و $y = 2 - x$ و محور x ها کدام است؟

$$4 \quad (4)$$

$$\frac{8}{3} \quad (3)$$

$$\frac{7}{2} \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

.....

.....

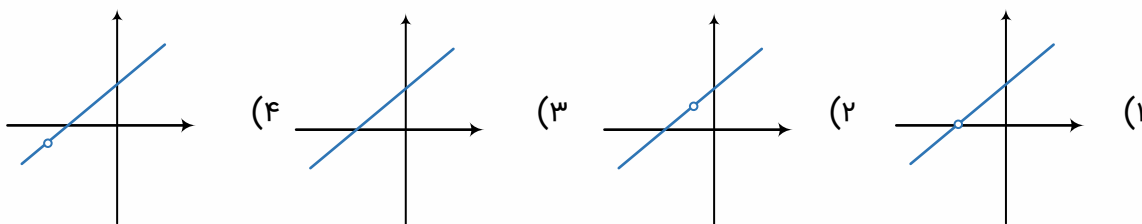
.....

.....





تست) نمودار تابع $y = \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 3}$ به کدام صورت است؟



.....

.....

.....

.....

تست: اگر تابع $f(x) = \{(1, a+2), (2, a+b), (5, 3a+2), (6, 2b+1)\}$ تابعی خطی باشد، مقدار $3a-b$ کدام است؟

- ۱ (۳) ۲ (۲) ۳ (۱) ۴ (۴)

گزینه (۳)

۱- اگر $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را بین $(1, a+2)$ و $(2, a+b)$ تشکیل دهیم به $\frac{b-2}{1}$ می‌رسیم.

۲- اگر $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را بین $(2, a+b)$ و $(5, 3a+2)$ بنویسیم به $\frac{2a+2-b}{3}$ می‌رسیم.

۳- اگر $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را بین $(5, 3a+2)$ و $(6, 2b+1)$ بنویسیم به $\frac{2b-3a-1}{1}$ می‌رسیم.

بنابراین باید همه مقادیر به دست آمده برای $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ با هم برابر شود:

$$\frac{b-2}{1} = \frac{2a+2-b}{3} = \frac{2b-3a-1}{1} \Rightarrow \begin{cases} 3b-6=2a-b+2 \\ 2a+2-b=6b-9a-3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4b-2a=8 \\ 11a-7b=-5 \end{cases} \xrightarrow{+} 9a-3b=3 \Rightarrow 3a-b=1$$



جزء صحیح و قدر مطلق

۱- جزء صحیح: برای هر عدد حقیقی مانند x ، جزء صحیح (براکت) آن، بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از x بیشتر نباشد و آن را با نماد $[x]$ نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر اگر n عددی صحیح باشد، آنگاه:

$$n \leq x < n+1 \Leftrightarrow [x] = n$$

ویژگی‌های جزء صحیح:

$$۱) [x] \leq x$$

$$۲) n \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x+n] = [x] + n$$

$$۳) [x] + [-x] = \begin{cases} -1 & ; x \in \mathbb{Z} \\ 0 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$۴) 0 \leq x - [x] < 1$$

نکته ۱: اگر a و b اعدادی صحیح باشند، آنگاه برای حل نامعادله‌های براکتی می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم:

$$۱) [A(x)] < b \xrightarrow{\text{براکت را بردار}} A(x) < b$$

$$۲) [A(x)] \leq b \xrightarrow[b \text{ اضافه کن}]{\text{یک واحد به}} [A(x)] < b+1 \xrightarrow{\text{براکت را بردار}} A(x) < b+1$$

$$۳) [A(x)] \geq a \xrightarrow{\text{براکت را بردار}} A(x) \geq a$$

$$۴) [A(x)] > a \xrightarrow[a \text{ اضافه کن}]{\text{یک واحد به}} [A(x)] \geq a+1 \xrightarrow{\text{براکت را بردار}} A(x) \geq a+1$$

یعنی به طور کلی اگر $a \leq [x] < b$ باشد، براکت قابل برداشت است ولی اگر طرف اول مساوی نداشت یا طرف دوم مساوی داشت، باید آن را به این شکل تبدیل کرد و سپس براکت را برداشت.

نکته ۲: به طور کلی برای پیدا کردن جواب نامعادلات به صورت $a \leq [x] \leq b$ یا $a < [x] < b$ به صورت زیر عمل می‌کنیم. (طرف اول مساوی‌دار باشد، طرف دوم بدون مساوی).

$$a \leq [x] \leq b \Rightarrow a \leq [x] < b+1 \Rightarrow a \leq x < b+1$$

$$a < [x] < b \Rightarrow a+1 \leq [x] < b \Rightarrow a+1 \leq x < b$$

نکته ۳: اگر $n \in \mathbb{N}$ باشد، آنگاه برد تابع $g(x) = [nx] - n[x]$ مجموعه اعداد زیر هستند:

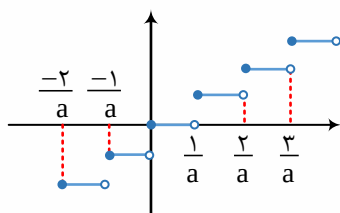
$$R_f = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$



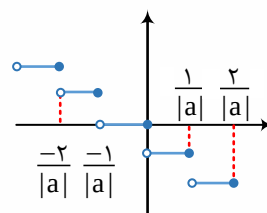


نکته ۴: چند نمودار براکتی مهم وجود دارند که بهتر است آنها را از قبل بشناسیم:

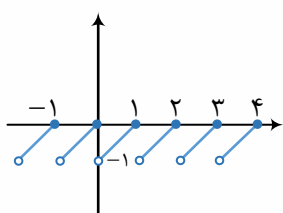
۱) $y = [ax] ; a > 0$



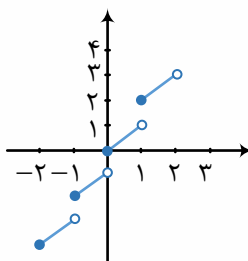
۲) $y = [ax] ; a < 0$



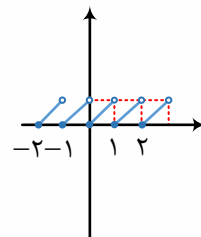
۳) $y = x + [-x]$



۴) $y = x + [x]$



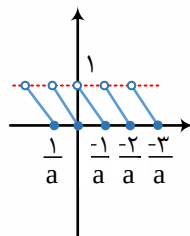
۵) $y = x - [x]$



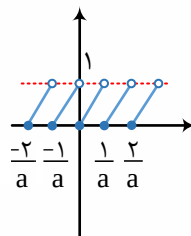
چمن در باد یا دندان اژدهای

نکته ۵: نمودار تابع $y = ax - [ax]$ به صورت زیر است:

۱) $a < 0$



۲) $a > 0$



در رسم توابع $y = abx - a[bx]$ اولین کار این است که فاکتورگیری کنیم.

تست) مجموعه جواب معادله $[\frac{3x+1}{x+2}] = 1$ کدام است؟

(۴) $(\frac{1}{2}, 2)$

(۳) $(\frac{1}{2}, 2)$

(۲) $(-2, -\frac{1}{2})$

(۱) $(-\frac{1}{2}, 2)$

.....

.....

.....

.....





تست) حاصل $\left[\frac{4n^2+3}{2n^2+1} \right]$ برای کلیه مقادیر طبیعی n کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

.....

.....

.....

.....

تست) اگر $198 = (1+\sqrt{2})^6 + (1-\sqrt{2})^6$ باشد، جزء صحیح عدد $(1+\sqrt{2})^6$ کدام است؟

۱۹۸ (۴)

۱۹۷ (۳)

۱۹۶ (۲)

۱۹۵ (۱)

.....

.....

.....

.....

تست) اگر $0 < \frac{1-3x}{x+1} < 2$ باشد، مجموعه مقادیر $\left[\frac{x}{2} \right]$ چند عضو دارد؟ (خارج - تیر ۱۴۰۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

.....

.....

.....

.....

تست) دامنه تعریف تابع $f(x) = \sqrt{[x] + [-x]}$ کدام است؟

W (۴)

N (۳)

Z (۲)

R - Z (۱)

.....

.....

.....

.....





تست) نمودار تابع $y = 2\left[\frac{x}{4}\right]$ در بازه $[-2, 6]$ ، از چند پاره خط مساوی هم تشکیل شده است؟

(۱) سه (۲) چهار (۳) پنج (۴) شش

.....

.....

.....

.....

تست) تابع $f(x) = [x] + [-x]$ با دامنه $-3 \leq x \leq 3$ و g تابع ثابت است. مقدار تابع $\frac{g}{f}$ در چند نقطه صحیح

در دامنه برابر ۳ است؟ (انسانی - داخل ۱۴۰۲)

(۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) صفر

.....

.....

.....

.....

تست: اگر جواب معادله $[x]^2 - (a+1)[x] + a = 0$ بازه $[b, c)$ باشد، حداکثر $c - b$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

گزینه (۲) - ابتدا به کمک اتحاد جمله مشترک عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$[x]^2 - (a+1)[x] + a = 0 \Rightarrow ([x]-1)([x]-a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} [x] = 1 \\ [x] = a \end{cases}$$

جواب معادله $[x] = 1$ به سادگی بازه $[1, 2)$ است. حالا اگر a عددی صحیح نباشد، آنگاه $[x] = a$ اصلاً جواب

ندارد و لذا بازه جواب فقط همین $[1, 2)$ است که یعنی $b = 1, c = 2$ است. در این صورت $c - b = 1$ است. اما

اگر a عددی صحیح باشد، آنگاه جواب $[x] = a$ بازه $[a, a+1)$ است. برای اینکه $[1, 2) \cup [a, a+1) = [b, c)$

باشد، چاره‌ای نداریم جز اینکه:

$$\begin{cases} a = 2 \Rightarrow [1, 2) \cup [2, 3) = [1, 3) \Rightarrow b = 1, c = 3 \Rightarrow c - b = 2 \\ a = 1 \Rightarrow [1, 2) \cup [1, 2) = [1, 2) \Rightarrow b = 1, c = 2 \Rightarrow c - b = 1 \\ a = 0 \Rightarrow [1, 2) \cup [0, 1) = [0, 2) \Rightarrow b = 0, c = 2 \Rightarrow c - b = 2 \end{cases}$$



بنابراین بیشترین مقدار $c - b = 2$ است.

۲- **قدر مطلق:** قدر مطلق هر عدد حقیقی مانند x را با نماد $|x|$ نشان می‌دهیم. و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

ویژگی‌های قدر مطلق:

۱) $|ab| = |a| |b|$

۲) $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$

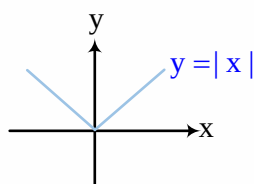
۳) $|a| \geq a$

۴) $|a| \geq 0$

۵) $|a^n| = |a|^n$

۶) $|a^{2n}| = a^{2n}$

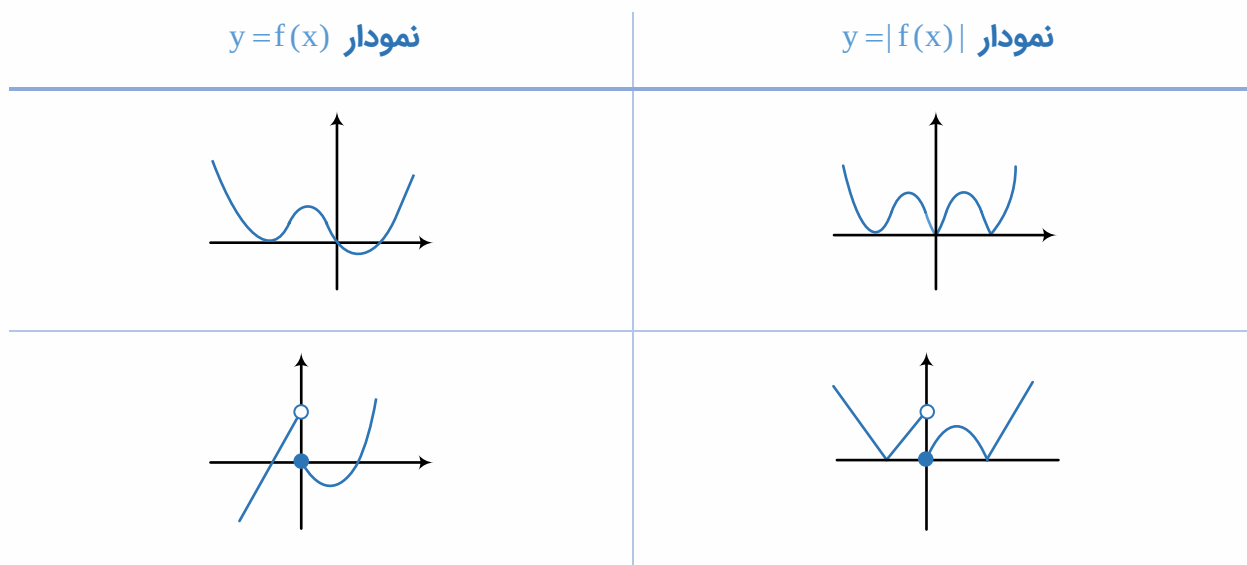
نمودار تابع $y = |x|$ به صورت مقابل است:



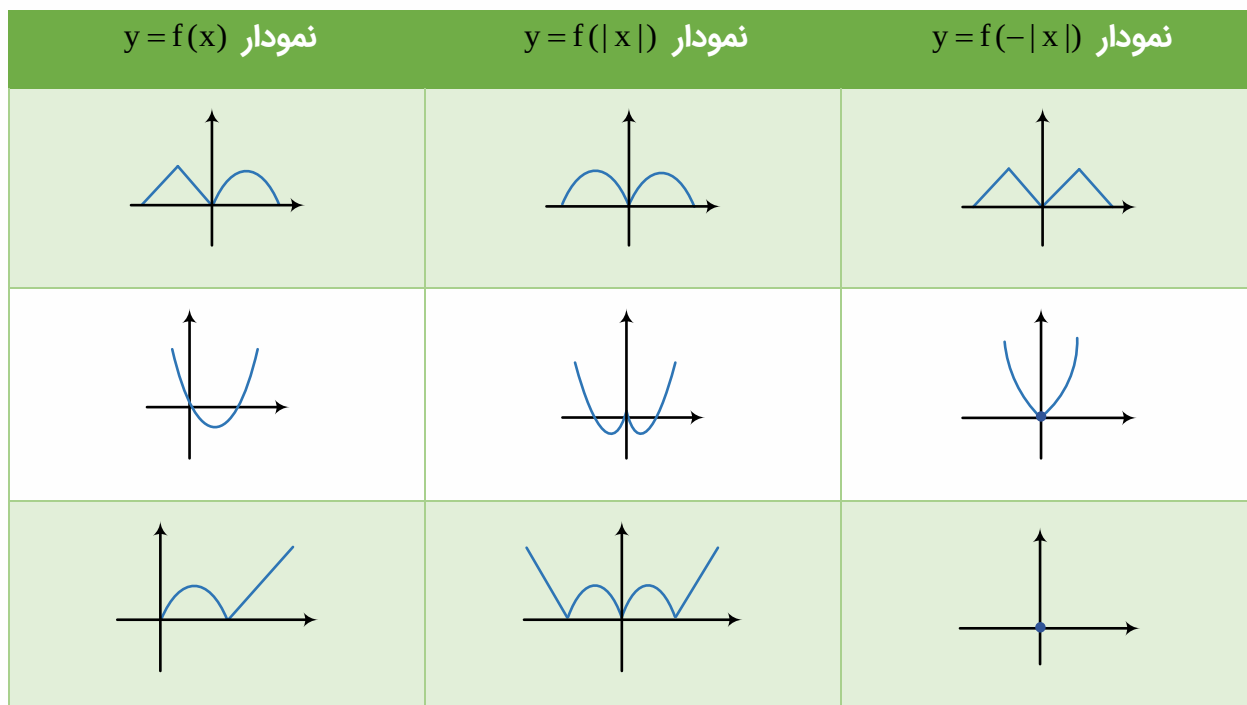
نکته ۶: اگر نمودار $y = f(x)$ را داشته باشیم، آنگاه نمودار $y = |f(x)|$ از قرینه کردن قسمت‌های پایین نمودار $y = f(x)$ به دست می‌آید.



به مثال‌های زیر توجه کنید.



نکته ۷: اگر نمودار $y = f(x)$ به صورت باشد، آنگاه نمودار تابع $y = f(|x|)$ به صورت است. یعنی نیمه راست نمودار در سمت چپ کپی می‌شود. در ضمن نمودار $y = f(-|x|)$ به صورت است. یعنی این بار نیمه سمت چپ در سمت راست کپی می‌شود چند مثال خوب با هم بخوانیم.



نکته ۸: رسم نمودار توابع به شکل کلی:

$$f(x) = k_1 |x - a_1| + k_2 |x - a_2| + \dots + k_n |x - a_n|$$

برای رسم این توابع، ابتدا نقاط به طول ریشه‌های داخل قدر مطلق را به دست می‌آوریم و به هم وصل می‌کنیم. سپس یک نقطه با طول بزرگ‌تر از بزرگ‌ترین ریشه و یک نقطه با طول کوچک‌تر از کوچک‌ترین ریشه را پیدا کرده و به سر نمودار وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم.

نکته ۹: فرض کنید مثلاً نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد. می‌خواهیم $y = |f(|x|)|$ را در دو مرحله رسم کنیم:

نمودار $y = f(x)$	مرحله اول $y = f(x)$	مرحله دوم $y = f(x) $

تست) نمودارهای دو تابع $y = |x+2| + |x-1|$ و $3y + x = 17$ در دو نقطه A و B متقاطع هستند. اندازه پاره خط AB، کدام است؟ (ریاضی - خارج ۱۴۰۱)

$4\sqrt{3}$ (۴)

$2\sqrt{2}$ (۳)

$4\sqrt{5}$ (۲)

$2\sqrt{10}$ (۱)

تست) اگر $f(x) = 2 - |x - 2|$ باشد، ضابطه تابع $f(f(x))$ کدام است؟ (ریاضی - خارج ۹۰)

$2 - f(x)$ (۴)

$f(x)$ (۳)

$f - x$ (۲)

x (۱)



تست) مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $f(x) = |2x - 1|$ و محور x ها و دو خط $x = 1$, $x = -1$ کدام است؟

(تجربی - داخل ۹۰)

$\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{5}{2}$ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

.....

.....

.....

.....

تست) اگر $[x - 2] = 1$ باشد، نمودارهای دو تابع $f(x) = |x - 3| - |x - 4|$ و $g(x) = 2x^2 + x - 17$ در چند نقطه

(خارج ۹۷)

مشترک هستند؟

(۴ فاقد نقطه مشترک

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

.....

.....

.....

.....

(خارج ۹۸)

تست) مجموع جوابهای معادله $|2x - 1| + |x + 2| = 3$ کدام است؟

$\frac{4}{3}$ (۴)

۱ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

$-\frac{2}{3}$ (۱)

.....

.....

.....

.....



تست) جواب معادله $\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} + |\sqrt{3} - \sqrt{5}| = \sqrt{2}$ کدام است؟

- (۱) $\pm\sqrt[4]{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$ (۲) $\pm\sqrt[4]{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ (۳) $\pm\sqrt[4]{5}$ (۴) $\pm\sqrt[4]{3}$

.....

.....

.....

.....

تساوی دو تابع

شرط لازم و کافی برای آن که دو تابع f و g برابر باشند، آن است که:

• دامنه f و دامنه g با هم برابر باشند.

• برای هر x از این دامنه یکسان، $f(x) = g(x)$ باشد، یعنی ضابطه‌های دو تابع بعد از ساده کردن یکسان باشد.

نکته ۱: اگر $f(x)$ تابعی درجه ۲ باشد و دو تابع $f(n-x)$ و $f(x+m)$ با هم برابر باشد، آنگاه:

$$x_s = \frac{m+n}{2}$$

نکته ۲: فرض کنید $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ و $g(x) = \frac{a'x+b'}{c'x+d'}$ دو تابع هموگرافیک باشند، در این صورت شرط تساوی

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$$

این دو تابع این است که:

تست) - کدام دسته از توابع زیر با هم برابرند؟

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = [x - [x]] \\ g(x) = \left[\frac{x^2}{x^2 + 1} \right] \end{array} \right. \quad (۴) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = 2x \\ g(x) = \frac{2x^2 - 2x}{x - 1} \end{array} \right. \quad (۳) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x - 2 \\ g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2} \end{array} \right. \quad (۲) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \\ g(x) = \frac{|x|}{x} \end{array} \right. \quad (۱)$$

.....

.....

.....

.....





تست) اگر دو تابع $f(x) = 2x - 1$ و $g(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$ با هم برابر باشند، مقدار a کدام است؟

۴ (۴

۳ (۳

۲ (۲

۱ (۱

.....

.....

.....

.....

تست) اگر دو تابع $f(x) = \frac{5}{x+2}$ و $g(x) = \frac{ax+b}{x^2+cx+d}$ با هم برابر باشند، مقدار $a+d$ کدام است؟

۱۲ (۴

۱۰ (۳

۹ (۲

۸ (۱

.....

.....

.....

.....

تست) دو تابع f و g بر روی اعداد حقیقی تعریف شده‌اند. در کدام حالت دو تابع مساوی‌اند؟
(تجربی - خارج ۹۱)

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{|x|}, g(x) = 1 \quad (۲$$

$$f(x) = 2 \log x, g(x) = \log x^2 \quad (۱$$

$$f(x) = \frac{x}{|x|}, g(x) = \frac{|x|}{x} \quad (۴$$

$$f(x) = (\sqrt{x})^2, g(x) = x \quad (۳$$

.....

.....

.....

.....

تست: دو تابع f و g بر روی اعداد حقیقی تعریف شده‌اند. در کدام حالت دو تابع مساوی‌اند؟

(تجربی خارج - ۹۱)

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{|x|}, g(x) = 1 \quad (۲)$$

$$f(x) = 2 \log x, g(x) = \log x^2 \quad (۱)$$

$$f(x) = \frac{x}{|x|}, g(x) = \frac{|x|}{x} \quad (۴)$$

$$f(x) = (\sqrt{x})^2, g(x) = x \quad (۳)$$

گزینه (۴) - به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم.

(۱) $D_f(x) = (0, \infty), D_g(x) = \mathbb{R} - \{0\}$ است، پس $D_f(x) \neq D_g(x)$ لذا $f \neq g$ ✗

(۲) $D_g(x) = \mathbb{R}, D_f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$ است، پس $D_f(x) \neq D_g(x)$ لذا $f \neq g$ ✗

(۳) $D_g(x) = \mathbb{R}, D_f(x) = [0, \infty)$ است، پس $D_f(x) \neq D_g(x)$ و لذا $f \neq g$ ✗

(۴) در این گزینه $D_f(x) = D_g(x) = \mathbb{R} - \{0\}$ و $f(x) = g(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$ پس $f = g$ است. ✓

انتقال و انبساط و انقباض افقی و عمودی

I- انتقال افقی و عمودی

۱- رسم نمودار $y = f(x+a)$ و $y = f(x-a)$ ($a > 0$)

برای رسم نمودار $y = f(x+a)$ باید نمودار f را a واحد به سمت چپ و برای رسم نمودار $f(x-a)$ باید نمودار f را a واحد به سمت راست انتقال دهیم.

توجه: انتقال افقی فقط روی دامنه، تأثیر دارد و همیشه برعکس عمل می‌کند. یعنی وقتی چیزی به x اضافه می‌شود، نمودار به سمت منفی می‌رود و اگر چیزی از x کم شود، نمودار به سمت راست (جهت مثبت محور طول‌ها) می‌رود.

۲- رسم نمودار $y = f(x) + a$ و $y = f(x) - a$ ($a > 0$)

برای رسم نمودار $y = f(x) + a$ باید نمودار f را a واحد به سمت بالا و برای رسم نمودار $y = f(x) - a$ باید نمودار f را a واحد به سمت پایین منتقل کنیم.

توجه: انتقال عمودی و افقی روی برد تأثیر دارد.

II- انقباض و انبساط

۱- رسم نمودار $y = f(ax)$ ($a > 0$)



نمودار تابع f باید با ضریب $\frac{1}{a}$ در راستای محور x ها، منبسط یا منقبض شود.

تذکر: انبساط و انقباض های افقی فقط روی دامنه تأثیرگذارند.

۲- رسم نمودار $y = f(ax)$, $(a > 0)$

نمودار تابع f باید با ضریب a منبسط یا منقبض شود.

توجه: انبساط و انقباض عمودی فقط روی برد تابع تأثیرگذارند.

۱۱- قرینه یابی

۱- برای رسم نمودار $y = -f(x)$ باید نمودار f را نسبت به محور x ها، قرینه کنیم.

۲- برای رسم نمودار $y = f(-x)$ باید نمودار تابع f را نسبت به محور y ها، قرینه کنیم.

۳- برای رسم نمودار $y = -f(-x)$ باید تابع را هم نسبت به محور x و هم نسبت به محور y ها قرینه کنیم.

یعنی در واقع تابع را نسبت به مبدأ مختصات قرینه کرده ایم.

۱۲- انتقال های ترکیبی

۱- رسم نمودار $y = f(ax + b)$

برای رسم باید ابتدا انتقال عدد ثابت b را انجام دهیم و سپس تغییرات مربوط به ضریب x (همان انبساط

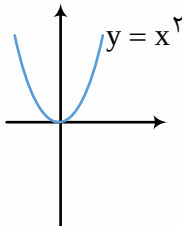
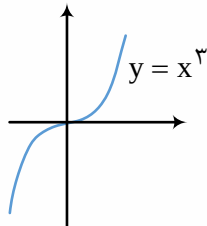
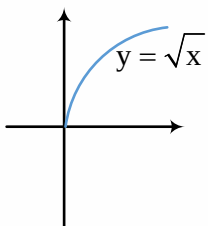
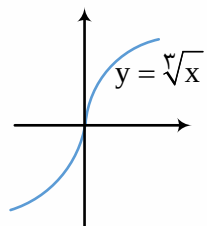
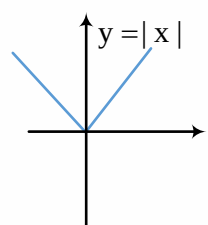
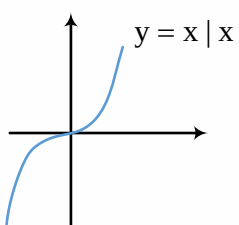
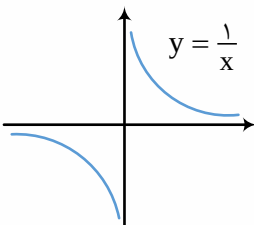
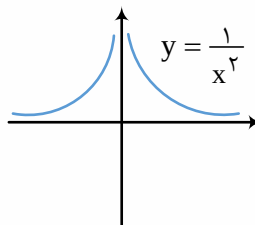
یا انقباض افقی و قرینه یابی نسبت به محور y ها) از روی شکل را اعمال کنیم.

۲- رسم نمودار $y = af(x) + b$

برای رسم، ابتدا ضریب a را اعمال می کنیم (همان انبساط یا انقباض عمودی و قرینه یابی عمودی و قرینه یابی

نسبت به محور x ها) و سپس عدد ثابت b که انتقال عمودی دارد را اثر دهیم.

۷- نمودار توابع پرکاربرد

تست) فاصله نقطه تلاقی منحنی‌های $y = x^2$ و $x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3}$ از مبدأ مختصات کدام است؟
(کنکور تجربی)

$\sqrt{15}$ (۴)

$2\sqrt{3}$ (۳)

$\sqrt{6}$ (۲)

$\sqrt{3}$ (۱)

.....

.....

.....

.....



تست) نمودار تابع $y = 2^{|\sin x|}$ را ابتدا به اندازه $\frac{\pi}{2}$ در امتداد محور x ها در جهت مثبت و سپس $\frac{\pi}{2}$ در امتداد محور y ها در جهت منفی انتقال می‌دهیم. تعداد محل تقاطع نمودار حاصل با محور x ها در فاصله $[0, \pi]$ ، کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۰)

۴ (۴

۲ (۳

۱ (۲

۰ (۱

.....

.....

.....

.....

تست) قرینه نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف x های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیم‌ساز ناحیه‌های اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟ (خارج ۹۷)

۱/۵ (۴

۱ (۳

۰/۵ (۲

-۲ (۱

.....

.....

.....

.....

تست) نمودارها، تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در امتداد محور x ها، ۱ واحد در جهت مثبت و سپس قرینه آن نسبت به محور x ها را در امتداد محور y ها ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه‌های برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات، کدام است؟ (خارج تیر ۱۴۰۱)

$\frac{\sqrt{10}}{2}$ (۴

$\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (۳

$\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۲

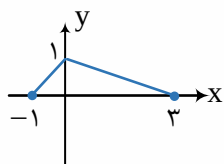
$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۱

.....

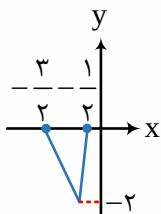
.....

.....

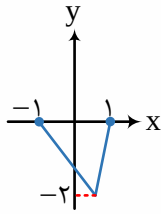
.....



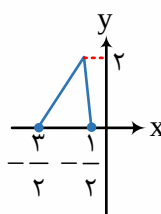
تست) اگر نمودار تابع f مانند شکل مقابل باشد، نمودار $y = -2f(-2x+1)$ کدام است؟



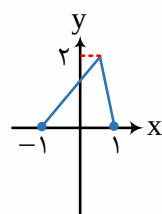
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

تست) اگر دامنه تابع $y = f(2x-1) + 3$ بازه $[-2, 6]$ باشد، دامنه تابع $g(x) = 3f(3x-4) - 3$ کدام است؟

(۴) $[-3, 1]$

(۳) $[-5, \frac{1}{3}]$

(۲) $[-\frac{1}{3}, 5]$

(۱) $[-1, 3]$

تست) نمودار تابع $y = -x^2 + 2x + 5$ را ۳ واحد به طرف x های مثبت، سپس ۲ واحد به طرف y های منفی

انتقال می‌دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟ (کنکور ۹۸)

(۴) $(2, 6)$

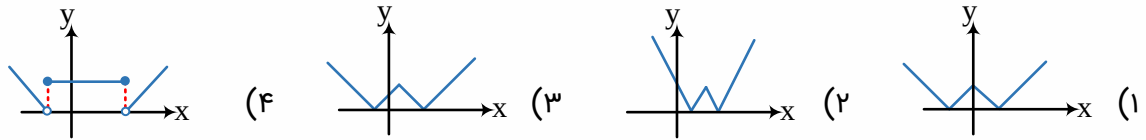
(۳) $(3, 5)$

(۲) $(2, 5)$

(۱) $(3, 4)$



تست) نمودار تابع $y = ||x - 1| - 2|$ کدام است؟



.....

.....

.....

.....

تست) ابتدا قرینه نمودار تابع $f(x) = (x-1)^2$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی کدام است؟ (خارج ۹۹)

- (۱) ۰, ۲ (۲) ۱, ۱ (۳) ۱, ۲ (۴) ۲, ۱

.....

.....

.....

.....

تست) - نمودار $\frac{1}{f}$ را در امتداد محور x ها، a واحد در جهت مثبت انتقال داده و آن را g می‌نامیم. سپس تابع $|g|$ را در امتداد محور y ها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. طول نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع $\frac{1}{|f|}$ برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است. اگر f تابع همانی باشد، اختلاف مقادیر در تساوی $f(x+a)=3$ کدام است؟

(تجربی - دی ۱۴۰۱)

- (۱) $2 + \sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) $2 - \sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2}$

.....

.....

.....

.....



تست) تابع $y = 2^{x+|x|}$ را ۳ واحد در امتداد محور x ها در جهت منفی و سپس در امتداد محور y ها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. منحنی حاصل محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟ (تجربی - خارج ۱۴۰۰)

$$\frac{7}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{5}{2} \quad (۳)$$

$$-\frac{3}{2} \quad (۲)$$

$$-\frac{5}{2} \quad (۱)$$

.....

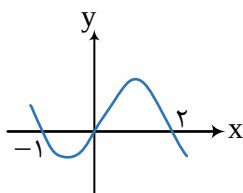
.....

.....

.....

تست) شکل زیر نمودار $f(x-2)$ را نشان می‌دهد. دامنه تابع $g(x) = \sqrt{\frac{f(1-x)}{f(x+1)}}$ شامل چند عدد صحیح

است؟ (تجربی - خارج ۱۴۰۲)



$$۴ \text{ بیش از } ۴$$

$$۳ \text{ صفر}$$

$$۲ \quad (۲)$$

$$۴ \quad (۱)$$

.....

.....

.....

.....





تست) برای رسم نمودار تابع $y = x^3 + 3x^2 + 3x$ با استفاده از نمودار تابع $y = x^3$ چه انتقال‌هایی باید انجام شود؟

(۱) یک واحد به راست، یک واحد به بالا

(۲) یک واحد به چپ، یک واحد به پایین

(۳) یک واحد به راست، انقباض افقی با ضریب ۳

(۴) یک واحد به پایین، انقباض افقی با ضریب ۳

.....

.....

.....

.....

تست) نمودار تابع $y = f(x+3)$ را ابتدا در جهت افقی با ضریب $\frac{1}{3}$ فشرده می‌کنیم سپس ۲ واحد به راست

و ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم. نمودار جدید را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم و در آخر در جهت

عمودی با ضریب ۳ انبساط می‌دهیم. ضابطه تابع جدید کدام است؟

$$y = 3f(2x-1)+1 \quad (2)$$

$$y = 3f(-2x+1)+1 \quad (1)$$

$$y = 3f(-2x-1)+1 \quad (4)$$

$$y = 3f(-2x-1)+3 \quad (3)$$

گزینه (۳) - نمودار اولیه $y = f(x+3)$ است، حال گام به گام جلو می‌رویم:

$$f(2x+3)$$

۱- انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{3}$:

$$f(2(x-2)+3) = f(2x-1)$$

۲- انتقال به اندازه ۲ واحد به راست:

$$f(2x-1)+1$$

۳- انتقال به اندازه ۱ واحد به بالا:

$$f(-2x-1)+1$$

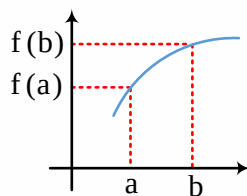
۴- قرینه کردن نسبت به محور عرض‌ها:

$$3f(-2x-1)+3$$

۵- انبساط در جهت عمودی با ضریب ۳:

تابع صعودی و تابع نزولی

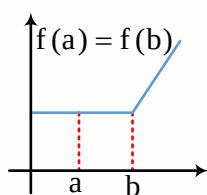
I- توابع صعودی و نزولی:



۱- به تابعی که در آن با افزایش مقدار x ، مقدار y هم افزایش یابد، تابع اکیداً صعودی می‌گویند. در تابع اکیداً صعودی، برای هر مقدار a و b در دامنه داریم:

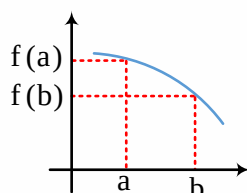
$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$$

توجه: کلمه اکیداً نشان می‌دهد تابع در هیچ بازه‌ای ثابت نیست.



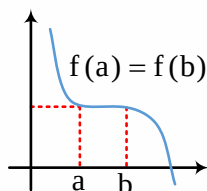
۲- به تابعی که در آن با افزایش مقدار x ، مقدار y افزایش یابد یا ثابت بماند، تابع صعودی می‌گویند، در تابع صعودی f برای هر دو مقدار a و b در دامنه داریم:

$$a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$$



۳- به تابعی که در آن با افزایش مقدار x ، مقدار y کاهش یابد، تابع اکیداً نزولی می‌گویند. در تابع اکیداً نزولی f ، برای هر دو مقدار a و b در دامنه داریم:

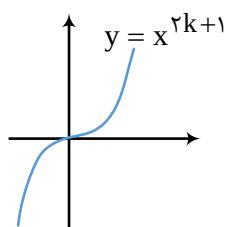
$$a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$$



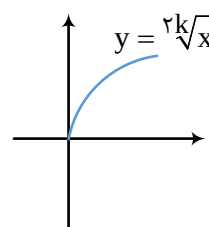
۴- به تابعی که در آن با افزایش مقدار x ، مقدار y کاهش یابد یا ثابت بماند، تابع نزولی می‌گویند در تابع نزولی f برای هر دو مقدار a و b در دامنه داریم:

$$a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$$

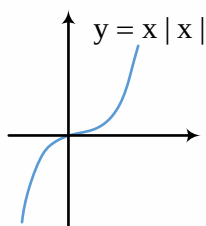
II- توابع صعودی و نزولی مهم:



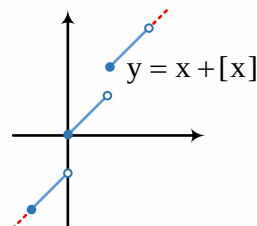
اکیداً صعودی



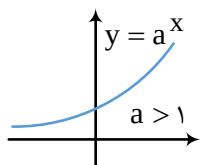
اکیداً صعودی



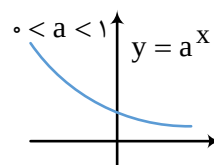
اکیداً صعودی



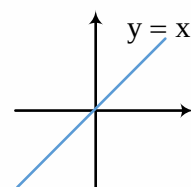
اکیداً صعودی



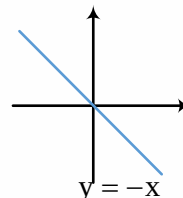
اکیداً صعودی



اکیداً نزولی

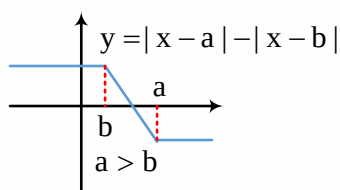


اکیداً صعودی

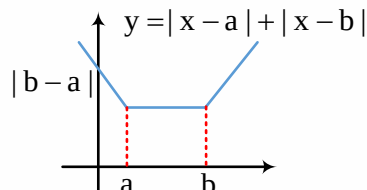


اکیداً نزولی

تابع گلدانی و تابع آبشاری



تابع آبشاری در $[a, b]$ اکیداً صعودی ($a < b$) یا اکیداً نزولی ($a > b$) است.



تابع گلدانی در $(-\infty, a]$ اکیداً نزولی و در $[b, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

نکته ۱: توابع $y = k|x-\alpha|+h$ و $y = k(x-\alpha)^2+h$ در بازه $(\alpha, +\infty)$ و همچنین در بازه $(-\infty, \alpha]$ اکیداً یکنوا هستند ولی در $\mathbb{R}$ یکنوا نیستند.

III تابع یکنوا و غیریکنوا:

۱- اگر تابع f در بازه $[a, b]$ اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، می‌گوییم تابع f در این بازه اکیداً یکنواست.

۲- اگر تابع f در بازه $[a, b]$ صعودی یا نزولی باشد، می‌گوییم f در این بازه یکنواست.

۳- اگر تابع f در بازه $[a, b]$ نه صعودی و نه نزولی باشد به آن تابع غیریکنوا می‌گوییم.

توجه: تابع $f(x) = c$ تنها تابعی است که در هر بازه هم صعودی و هم نزولی است، بنابراین تابع ثابت تابع یکنوا محسوب می‌شود ولی اکیداً یکنوا نیست.

نکته ۱: به طور کلی درباره ضرب و تقسیم نتایج کمی درباره یکنوایی وجود دارد. اما مهم‌ترین نتیجه درست

این است: اگر $y = f(x)$ و $y = g(x)$ هر دو تابعی صعودی [نزولی] در بازه A باشند و در این بازه مقادیر

تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ همواره مثبت باشند، آنگاه $f(x)g(x)$ صعودی [نزولی] است.

نکته ۲: اگر $f(x)$ صعودی باشد $-f(x)$ و $f(-x)$ نزولی است و برعکس.

نکته ۳: انتقال افقی و عمودی و همچنین انبساط و انقباض تأثیری روی نوع یکنوایی تابع ندارد.

نکته ۴: اگر $a > 0$ باشد، آنگاه توابع $f(ax+b)$ و $f(x)$ از لحاظ صعودی بودن یا نزولی بودن مانند هم

هستند. یعنی یا هر دو صعودی‌اند، یا هر دو نزولی‌اند، یا هر دو غیریکنوا هستند.

نکته ۵: اگر $a < 0$ باشد، توابع $f(ax+b)$ و $f(x)$ یا یکی صعودی و دیگری نزولی هستند، یا هر دو غیریکنوا

هستند.

نکته ۶: اگر $f(x)$ در $\mathbb{R}$ صعودی و $g(x)$ در $\mathbb{R}$ نزولی باشد، آنگاه:

ترکیب دو تابع	وضعیت یکنوایی
$f \circ g(x)$	نزولی
$g \circ f(x)$	نزولی
$f \circ f(x)$	صعودی
$g \circ g(x)$	صعودی



نکته ۷: برای این که تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ در بازه (m,n) صعودی باشد، لازم است که هم $ad-bc \geq 0$ باشد و هم ریشهٔ مخرج $f(x)$ در بازه (m,n) قرار نداشته باشد. برای نزولی بودن هم، مطالب مشابهی داریم که می‌گویند $ad-bc \leq 0$ و مجدداً ریشهٔ مخرج $f(x)$ در (m,n) نباشد.

۳ نکتهٔ مهم دربارهٔ توابع صعودی و نزولی:

۱- اگر $f(x)$ تابعی صعودی باشد، می‌توانیم آن را از دو طرف نامعادله حذف کنیم:

$$f(A(x)) > f(B(x)) \Rightarrow A(x) > B(x)$$

۲- اگر $f(x)$ تابعی نزولی باشد، با حذف کردن آن جهت نامعادله عوض می‌شود:

$$f(A(x)) > f(B(x)) \Rightarrow A(x) < B(x)$$

۳- اگر $f(x)$ یکنوا نباشد، اصلاً از دو طرف نامعادله قابل حذف نیست.

تست) - کدام گزینه دربارهٔ تابع $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & x \leq 0 \\ x+h & x \geq 1 \end{cases}$ به ترتیب به ازای $h=0$, $h=1$ و $h=-1$ درست است؟

۱) صعودی - اکیداً صعودی - نزولی ۲) اکیداً صعودی - صعودی - غیریکنوا

۳) صعودی - اکیداً صعودی - غیریکنوا ۴) غیریکنوا - صعودی - اکیداً صعودی

.....

.....

.....

.....

تست) تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است. اگر $f(3)=0$ باشد، دامنهٔ $g(x) = \sqrt{x^2 f(x)}$ شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟ (خارج تیر ۱۴۰۱)

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

.....

.....

.....

.....



تست) تابع f اکیداً نزولی و دامنه آن مجموعه‌ای از مقادیر منفی است. اگر $f(m^2 - m - 5) < f(-3 + 2m - m^2)$

(کنکور ۱۴۰۲)

باشد، m دارای چند مقدار صحیح است؟

۴) صفر

۳) ۳

۲) ۲

۱) ۱

تست) تابع $f = \{(3, 2), (2, 1 - x^2), (4, 1), (1, -|x^2 - 1|)\}$ نزولی است. حدود تغییرات x کدام است؟

۴) $\emptyset$

۳) $-1 \leq x \leq 1$

۲) $x \in \mathbb{R}$

۱) $x \geq 1$ یا $x \leq -1$

تست) تابع با ضابطه $f(x) = |x + 1| - |x - 2|$ ، در کدام بازه اکیداً صعودی است؟ (خارج ۹۸)

۴) $(2, +\infty)$

۳) $(-1, 2)$

۲) $(-1, +\infty)$

۱) $(-\infty, 2)$



تست) اگر $f(x) = (x + \log x)^5$ باشد، مجموعه جواب نامعادله $(f \circ f)(x) < f(x^5)$ کدام است؟
(کنکور ۱۴۰۲)

- (۱) $(0, 5)$ (۲) $(0, 1)$ (۳) $(5, +\infty)$ (۴) $(1, +\infty)$

.....

.....

.....

.....

تست) تابع $f(x) = mx^2 - nx + k$ در هر بازه، هم صعودی و هم نزولی است. اگر مجموعه زیر تابع باشد، مقدار $f(\sqrt{5})$ کدام است؟
(تجربی - دی ۱۴۰۱)

$$\{(m, n-1), (0, k), (n-1, m^2 + 2m-1), (2k+2, 2k+1)\}$$

- (۱) -1 (۲) $-\sqrt{5}$ (۳) 1 (۴) $\sqrt{5}$

.....

.....

.....

.....

تست) تابع با ضابطه $f(x) = |x+2| + |x-1|$ در کدام بازه اکیداً نزولی است؟ (تجربی - داخل ۹۸)

- (۱) $(-\infty, -2)$ (۲) $(-\infty, 1)$ (۳) $(-2, 1)$ (۴) $(1, +\infty)$

.....

.....

.....

.....

تست: اگر $f(x)$ تابعی نزولی با دامنه $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه دامنه تابع $g(x) = \sqrt{f(x^2 + 4x) - f(x - 2)}$ کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R} - [-4, 1]$ (۲) $\mathbb{R} - [-2, -1]$ (۳) $[-2, 1]$ (۴) $[-2, -1]$

گزینه (۴) - باید نامعادله $f(x^2 + 4x) - f(x - 2) \geq 0$ را حل کنیم:

$$f(x^2 + 4x) \geq f(x - 2)$$

چون $f(x)$ نزولی است، با حذف آن از دو طرف نامعادله، جهت نامعادله عوض می‌شود:

$$x^2 + 4x \leq x - 2 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 \leq 0 \rightarrow x \in [-2, -1]$$

$(x+3)(x+1) \leq 0$