

تمرین بعد از کلاس

به سبک استاد علی داودوندی رتبه ۶۱ کنکور



در هر قسمت ابتدا ۱ دقیقه خودتان فکر کنید اگه نتوانستید حل کنید ۱ دقیقه به کمک جزوه سوال را حل کنید و اگر باز هم نتوانستید در ۱ دقیقه پاسخنامه را بررسی کرده و سپس مسیر حل را به خودتان توضیح دهید. حل ویدیویی تمرین ها در آپارات و یوتیوب قرار گرفته است و به کمک **تایم لاین** می توانید هر سوال را پیدا کنید و حل آن را مشاهده کنید

 ALIDAVOODVANDI.IR

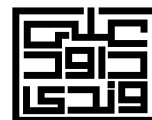
 [ALI.DAVOODVANDI](https://www.instagram.com/ALI.DAVOODVANDI)

 [ALI_DAVOODVANDI](https://www.youtube.com/ALI_DAVOODVANDI)

 [ALI_DAVOODVANDI](https://www.tiktok.com/ALI_DAVOODVANDI)

 ۰۹۳۸۳۱۶۵۳۵۴

 [ALI_DAVOODVANDI](https://www.telegram.me/ALI_DAVOODVANDI)



گزینه ۳

۱

چون نمی‌دانیم $-k$ در کدامیک از محدوده‌های $x \geq 2$ و $x < 2$ قرار دارد، باید هر دو حالت را حل کنیم و سپس جواب به‌دست‌آمده را بررسی کنیم.
در محدوده $x \geq 2$:

$$f(-k) = 3 \Rightarrow 2(-k) - 1 = 3 \Rightarrow -2k = 4 \Rightarrow k = -2$$

$-k = 2$ در محدوده $x \geq 2$ قرار دارد، پس قابل قبول است.
در محدوده $x < 2$:

$$f(-k) = 3 \Rightarrow \frac{3(-k) + 2}{4} = 3 \Rightarrow -3k + 2 = 12 \Rightarrow k = -\frac{10}{3}$$

$-k = \frac{10}{3}$ در محدوده $x < 2$ قرار ندارد، پس قابل قبول نیست.

گزینه ۲

۲

$$\text{چون } m > 0 \Rightarrow m^2 > 0 \Rightarrow m^2 + 1 > 1, \quad m > 0 \Rightarrow -m^3 < 0 \Rightarrow -m^3 - 2 < -2$$

بنابراین برای به دست آوردن $f(m^2 + 1)$ از ضابطه پایینی و برای به دست آوردن $f(-m^3 - 2)$ از ضابطه بالا استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(m^2 + 1) = -3 \\ f(-m^3 - 2) = 5 \end{cases} \Rightarrow f(m^2 + 1) - f(-m^3 - 2) = -3 - 5 = -8$$

گزینه ۲

۳

$f(-2)$ هم در ضابطه اول است و هم در ضابطه دوم، چون f یک تابع است، بنابراین باید $f(-2)$ منحصر به فرد باشد:

$$\begin{cases} f(-2) = -m(-2) + 1 = 2m + 1 \\ f(-2) = -5 \end{cases} \Rightarrow 2m + 1 = -5 \Rightarrow 2m = -6 \Rightarrow m = -3 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & x \geq -2 \\ -5 & x \leq -2 \end{cases}$$

در نتیجه برای محاسبه $f(-1)$ از ضابطه بالایی و برای محاسبه $f(-4)$ از ضابطه پایینی استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(-1) = 3(-1) + 1 = -2 \\ f(-4) = -5 \end{cases} \Rightarrow f(-1) + f(-4) = -2 - 5 = -7$$

باتوجه به نمودار ۱ و $f(1) = 1$ و $f(-1) = -2$ و $f(-4) = 0$ ، در گزینه ۳، $f(-1) \neq -2$ است بنابراین حذف می‌شود. در گزینه ۱، $f(-1) = -3$ ، بنابراین گزینه ۱ حذف می‌شود. برای $x < -1$ ضابطه f به صورت خطی است آن را به دست می‌آوریم:

$$(-4, 0), (-1, -3)$$

$$\text{شیب خط} = \frac{0+3}{-4+1} = -1 \Rightarrow y - 0 = -1(x + 4) \Rightarrow y = -x - 4$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

نمودار تابع $f(x)$ را با استفاده از نقطه‌یابی رسم می‌کنیم:

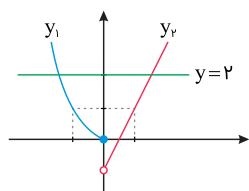
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \leq 0 \\ 2x - 1 & ; x > 0 \end{cases}$$

$$y_1 = x^2$$

x	۰	-۱
y_1	۰	۱

$$y_2 = 2x - 1$$

x	۰	۱
y_2	-۱	۱



همانطور که از شکل پیدا است خط $y = 2$ نمودار f را در ۲ نقطه قطع می‌کند.

ابتدا نمودار تابع را با استفاده از نقطه‌یابی رسم می‌کنیم:

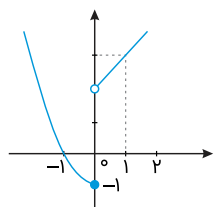
$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & ; x \leq 0 \\ x + 2 & ; x > 0 \end{cases}$$

ضابطه اول: $y = x^2 - 1$

x	0	-1
y	-1	0

ضابطه دوم: $y = x + 2$

x	0	1
y	2	3



بنابراین برد تابع به صورت $y \geq -1$ است.

در تابع چندضابطه‌ای داده شده، $f(2m) = 9$ است. از طرفی با قرار دادن $x = 2m$ در ضابطه دوم داریم:

$$f(2m) = 2(2m) + 1 = 9 \Rightarrow 4m = 8 \Rightarrow m = 2$$

به طور مشابه در نقطه $x = n - 1$ داریم:

$$f(n - 1) = m + n \Rightarrow 2(n - 1) + 1 = m + n \xrightarrow{m=2} 2n - 1 = 2 + n \Rightarrow n = 3$$

تابع $f(x)$ به صورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} 5 & ; x \leq 2 \\ 2x + 1 & ; 2 \leq x \leq 4 \\ 9 & ; x \geq 4 \end{cases}$$

$$f(m + n) = f(5) = 9$$

به ازای $x \geq 2$ مقدار تابع ثابت و برابر $y = 2$ است.

$$f(x) = 2 \quad ; x \geq 2$$

در محدوده $0 < x < 2$ ، نیمساز ناحیه اول رسم شده که نمودار تابع همانی است.

$$f(x) = x \quad ; 0 < x < 2$$

به ازای $x \leq 0$ ، نیمساز ناحیه دوم رسم شده است. هر نقطه روی نیمساز ناحیه دوم، دارای طول و عرض قرینه می‌باشد.

$$f(x) = -x \quad ; x \leq 0$$

عدد -2 در محدوده $x < -1$ قرار دارد، بنابراین $f(-2)$ از ضابطه اول به دست می‌آید.

$$f(x) = x \Rightarrow f(-2) = -2$$

عدد $\sqrt{3} \simeq 1/7$ در محدوده $-1 \leq x \leq 2$ قرار دارد، بنابراین $f(\sqrt{3})$ از ضابطه دوم به دست می‌آید.

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}^2 = 3$$

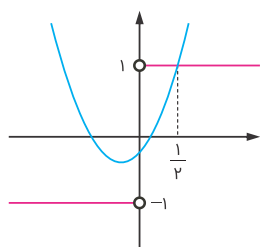
عدد $1 + \sqrt{2}$ از 2 بزرگ‌تر است، یعنی در محدوده $x > 2$ قرار دارد. پس $f(1 + \sqrt{2})$ را از ضابطه سوم به دست می‌آوریم.

$$f(x) = 5 \Rightarrow f(1 + \sqrt{2}) = 5$$

اکنون حاصل عبارت خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$\frac{f(-2) + f(\sqrt{3})}{f(1 + \sqrt{2})} = \frac{-2 + 3}{5} = \frac{1}{5}$$

$$y = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$$



طبق داده‌های مسئله، باید داشته باشیم:

$$1) f(0) \geq -1 \Rightarrow c \geq -1$$

$$2) f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow 2\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + c = 1 \Rightarrow c = -\frac{1}{4}$$

جواب به دست آمده، قابل قبول است.

به ازای $x = 1$ و $x = -1$ دو ضابطه را برابر قرار می‌دهیم.

$$\sqrt{1+3} + 2a = a + 5 \Rightarrow a = 3$$

$$f(a) = f(3) = 3(3)^2 + 5 = 32$$

$$\begin{aligned} ||\underbrace{\sqrt{5}-3}_{\text{منفی}}| - |\underbrace{-3-\sqrt{5}}_{\text{منفی}}|| &= |-(\sqrt{5}-3) - (-(-3-\sqrt{5}))| \\ &= |-\sqrt{5}+3 - (3+\sqrt{5})| \\ &= |-\sqrt{5}+3-3-\sqrt{5}| \\ &= |-2\sqrt{5}| \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

* نکته:

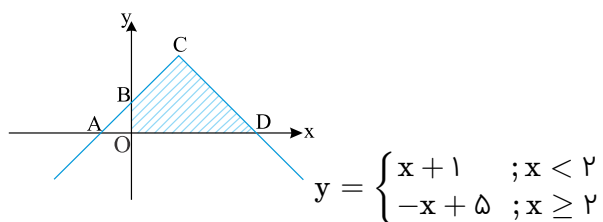
$$f(x) = |x| : \text{تابع قدر مطلق} = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$y = 2|x-3| + 1 = \begin{cases} 2(x-3) + 1 & ; x-3 \geq 0 \\ -2(x-3) + 1 & ; x-3 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} 2x-5 & ; x \geq 3 \\ -2x+7 & ; x < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2, b=-5 \\ c=-2, d=7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + 2b - c - 2d = 2 - 10 + 2 - 14 = -20$$

ابتدا ضابطه تابع را می‌نویسیم:



با تعیین محل برخورد شکل با محور x ها و y ها، مساحت قابل محاسبه است:

$$y = 0 \Rightarrow -|x - 2| + 3 = 0 \Rightarrow -|x - 2| = -3 \Rightarrow |x - 2| = 3 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 3 \Rightarrow x = 5 \\ x - 2 = -3 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

پس دو نقطه برخورد شکل با محور x ها نقاط $(-1, 0)$ و $(5, 0)$ می‌باشد.

$$x = 2 \Rightarrow y = -|2 - 2| + 3 = 3 \Rightarrow (2, 3) \text{ نقطه رأس نمودار}$$

پس در مثلث $\triangle ACD$ قاعده برابر $AD = 1 + 5 = 6$ و ارتفاع $y_2 = 3$ است. مثلث $\triangle OAB$ نیز ارتفاع و قاعده ۱ دارد پس:

$$\frac{3 \times 6}{2} - \frac{1 \times 1}{2} = 9 - \frac{1}{2} = 8\frac{1}{2}$$

باتوجه به ریشه‌های قدرمطلقها ضابطه تابع f را در فواصل مختلف ساده می‌کنیم:

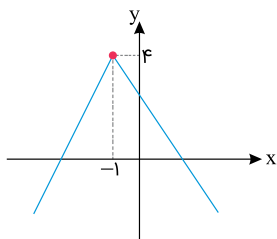
$$x \geq 1 : f(x) = 2(x - 1) - (2x + 3) = \cancel{2x} - 2 - \cancel{2x} - 3 = -5$$

$$-\frac{3}{2} < x < 1 : f(x) = -2(x - 1) - (2x + 3) = -2x + 2 - 2x - 3 = -4x - 1$$

$$x \leq -\frac{3}{2} : f(x) = -2(x - 1) + (2x + 3) = -\cancel{2x} + 2 + \cancel{2x} + 3 = 5$$

پس در فواصل $(-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [1, +\infty)$ تابع ثابت است.

نمودار $y = -2|x + 1| + 4$ را رسم می‌کنیم. چون ضریب قدرمطلق منفی است نمودار تابع به صورت عدد هشت می‌باشد.



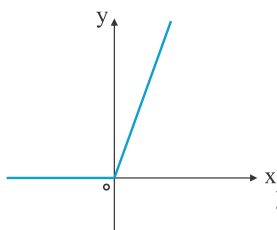
$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$x = -1 \Rightarrow y = 4$$

نقطه $(-1, 4)$ رأس تابع قدرمطلق است.

$$y = x + |x| = \begin{cases} x + x & ; x \geq 0 \\ x - x & ; x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} 2x & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$$



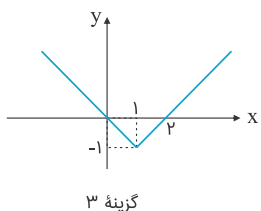
بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱:

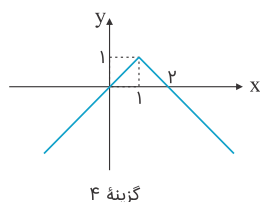
$$y = x - |x| = \begin{cases} x - x & ; x \geq 0 \\ x + x & ; x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} 0 & ; x \geq 0 \\ 2x & ; x < 0 \end{cases}$$

گزینه‌های ۳ و ۴ نیز به صورت زیر می‌باشند:



گزینه ۳



گزینه ۴

باتوجه به نقاط داده شده ضابطه تابع g را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} (0, 1) \\ (-1, 3) \end{cases} \Rightarrow \text{شیب خط} = \frac{1-3}{0+1} = -2$$

$$\Rightarrow y - 1 = -2(x - 0) \Rightarrow y = -2x + 1 \Rightarrow g(x) = -2x + 1$$

پس ضابطه تابع $h(x)$ به صورت $h(x) = |-2x + 1|$ است.

اگر $g(x) \geq 0$ باشد دو تابع با یکدیگر برابرند و بر هم منطبق خواهند شد، پس داریم:

$$g(x) \geq 0 \Rightarrow -2x + 1 \geq 0 \Rightarrow -2x \geq -1 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

نکته: در صورتی دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقطه‌ای به طول a مشترک‌اند که رابطه $f(a) = g(a)$ برقرار باشد. ابتدا ضابطه تابع $g(x)$ را به صورت زیر ساده می‌کنیم.

$$g(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$$

بنابراین مقادیری که به ازای آن‌ها $f(x) = g(x)$ می‌باشد را به دست می‌آوریم.

$$x > 0 : f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x+1)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 & \text{ق ق غ} \\ x = 3 & \text{ق ق ق} \end{cases}$$

$$x < 0 : f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = -1 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4(1)(-1) = 8 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2} & \text{ق ق غ} \\ x_2 = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2} & \text{ق ق ق} \end{cases}$$

بنابراین دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقاط به طول $x = 3$ و $x = 1 - \sqrt{2}$ با یکدیگر برابرند.

تابع قدر مطلق به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}, \quad f(x) = |-2x - 3|$$

اگر $-2x - 3$ مثبت یا صفر باشد ($-2x - 3 \geq 0$)، خروجی خود $-2x - 3$ است. اگر $-2x - 3$ منفی باشد ($-2x - 3 < 0$)، خروجی قرینه $-2x - 3$ است:

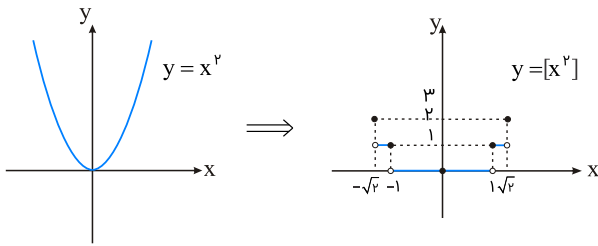
$$\begin{cases} -2x - 3 \geq 0 \Rightarrow f(x) = -2x - 3 \\ -2x - 3 < 0 \Rightarrow f(x) = -(-2x - 3) = 2x + 3 \end{cases}$$

$$f(x) = |-2x - 3| = \begin{cases} -2x - 3 & ; -2x - 3 \geq 0 \\ 2x + 3 & ; -2x - 3 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & ; x \leq -\frac{3}{2} \\ 2x + 3 & ; x > -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$-|x + 1| \leq 0 \xrightarrow{+\frac{a}{r}} y \leq \frac{a}{r} = -2 \Rightarrow a = -4$$

$$[x^2] = 1 \Rightarrow 1 \leq x^2 < 2 \Rightarrow x \in (-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}) \quad (*)$$



$$f(x) = |x+1| + |2x-2| = \begin{cases} -3x+1 & ; x \leq -1 \\ -x+3 & ; -1 < x < 1 \\ 3x-1 & ; x \geq 1 \end{cases}$$

نقاط برخورد f و g را پیدا می‌کنیم:

$$x \leq -1: -3x+1 = -2x^2+2x+2 \Rightarrow 2x^2-5x-1=0$$

$$\Rightarrow \Delta = 33 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x \simeq -0.18 \times \\ x \simeq 2.68 \times \end{cases}$$

$$x \geq 1: 3x-1 = -2x^2+2x+2 \Rightarrow 2x^2+x-3=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \text{ ق.ق} \\ x=\frac{c}{a} = \frac{3}{2} \times \end{cases}$$

تنها $x=1$ در بازه $(*)$ قرار دارد. بنابراین توابع f و g در یک نقطه باهم برخورد دارند.

$$x = -2 \Rightarrow |x| = |-2| = 2 \quad \text{زوج}$$

$$\Rightarrow f(-2) = \left[\frac{-2}{3} + \frac{9}{5} \right] = \left[\frac{17}{15} \right] = 1, \quad 1 < \frac{17}{15} < 2$$

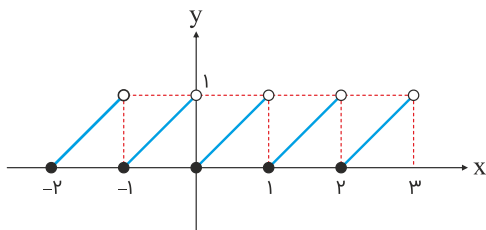
$$x = -3 \Rightarrow |x| = |-3| = 3 \quad \text{فرد}$$

$$\Rightarrow f(-3) = \left[\frac{-3}{2} - \frac{2}{3} \right] = \left[\frac{-13}{6} \right] = -3, \quad -3 < \frac{-13}{6} < -2$$

$$f(-2) + f(-3) = 1 - 3 = -2$$

$$[x^2 - 1] = -1 \Rightarrow -1 \leq x^2 - 1 < 0 \Rightarrow 0 \leq x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

تابع $y = x - [x]$ تابع دندانه‌ای است که باید آن را به خاطر داشته باشیم:



دید می‌شود که در هر فاصله یک پاره‌خط به طول $\sqrt{2}$ وجود دارد پس تعداد پاره‌خط‌ها ۵ تا است، بنابراین $(n, L) = (5, \sqrt{2})$.

گام اول

باتوجه به ضابطه تابع که به صورت $y = 2 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1$ است، محدوده اولیه x را به زیربازه‌های زیر تقسیم کرده و در هر زیربازه مقدار y را تعیین می‌کنیم.

$$-2 \leq x < 0, 0 \leq x < 2, 2 \leq x < 4, 4 \leq x < 6$$

گام دوم

برای پاسخ گویی به تست نیازی به رسم نمودار تابع نیست. به تعداد ضابطه‌های به دست آمده، پاره‌خط در نمودار تابع وجود دارد.

$$-2 \leq x < 0 \Rightarrow -1 \leq \frac{x}{2} < 0 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = -1 \Rightarrow y = 2(-1) + 1 = -2 + 1 = -1$$

$$0 \leq x < 2 \Rightarrow 0 \leq \frac{x}{2} < 1 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$2 \leq x < 4 \Rightarrow 1 \leq \frac{x}{2} < 2 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 1 \Rightarrow y = 2(1) + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$4 \leq x < 6 \Rightarrow 2 \leq \frac{x}{2} < 3 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 2 \Rightarrow y = 2(2) + 1 = 4 + 1 = 5$$

پس نمودار تابع حداقل از چهار پاره‌خط مساوی به طول ۲ تشکیل شده است.

$$-2 < -\sqrt{2} < -1 \Rightarrow f(-\sqrt{2}) = [-\sqrt{2}] + 1 = -2 + 1 = -1$$

$$g(-2) = |-2| - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow A = -1$$

تابع چند ضابطه‌ای که در هر ضابطه مقدار تابع، عددی ثابت است را پلکانی گویند. با رسم گزینه‌های "۱" و "۲" می‌فهمیم که پلکانی هستند. گزینه "۳" هم تابع جزء صحیح است که پلکانی است. فقط تابع گزینه "۴" ویژگی‌های تابع پلکانی را ندارد.

نکته: تابع پلکانی، تابعی چندضابطه‌ای است که هر ضابطه آن عدد ثابت است، بنابراین در ضابطه اول و دوم باید ضریب x^2 و x را برابر با صفر قرار دهیم:

$$\text{ضابطه اول: } \begin{cases} (m+1) = 0 \Rightarrow m = -1 \\ n^2 - 1 = 0 \Rightarrow n = \pm 1 \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{دوم ضابطه: } (n-1) = 0 \Rightarrow n = 1 \quad (**)$$

$$\xrightarrow{(*), (**)} n = 1 \Rightarrow m^2 + n = (-1)^2 + 1 = 2$$

عددهای x ، x^3 و x^9 بین ۰ و ۱ هستند و x^6 بین ۰ و ۱ قرار دارد. بنابراین:

$$[x] + [x^3] + [x^6] + [x^9] = -1 - 1 + 0 - 1 = -3$$

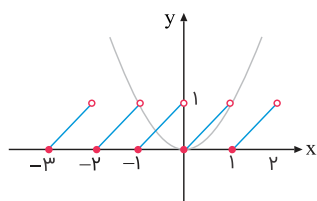
$$\left. \begin{aligned} x - 1 \geq 0 &\Rightarrow x \geq 1 \\ [x] - 4 = 0 &\Rightarrow [x] = 4 \Rightarrow 4 \leq x < 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_f = [1, 4) \cup [5, +\infty)$$

ریشه‌های مخرج

جعبه ابزار:

$$0 \leq x - [x] < 1$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$



$$-1 < x < 0 : x + 1 = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=5} x = \frac{+1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \xrightarrow{-1 < x < 0} x &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \xrightarrow{\text{مجموع}} \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ x = 0 &\text{ باتوجه به نمودار} \end{aligned} \right.$$

$$[x + 3] + 3[x] = 15 \Rightarrow [x] + 3 + 3[x] = 15 \Rightarrow 4[x] = 12 \Rightarrow [x] = 3 \Rightarrow 3 \leq x < 4$$

برای رسم نمودار $f([x])$ ، دامنه تابع $f(x)$ را به صورت زیر بازه‌بندی می‌کنیم:

$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow f([x]) = f(-2) = -1$$

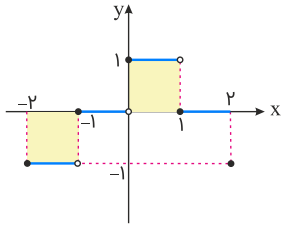
$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow f([x]) = f(-1) = 0$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f([x]) = f(0) = 1$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f([x]) = f(1) = 0$$

$$x = 2 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow f([x]) = f(2) = -1$$

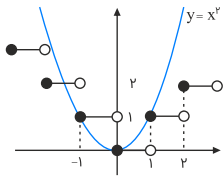
پس نمودار این تابع به این صورت خواهد بود:



واضح است که ناحیه ایجادشده با محور x ها شامل دو مربع به ضلع واحد است و لذا: $S = 1 + 1 = 2$

نمودار تابع $y = |x|$ و $y = x^2$ را رسم می‌کنیم. مطابق شکل دو تابع یکدیگر را در ۴ نقطه قطع می‌کنند و معادله ۴ جواب دارد. مقدار دقیق جواب‌ها عبارت است از:

$$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -\sqrt{2}, x_4 = 0$$



$$\text{دامنه} = \mathbb{R} - \{3\}$$

$$-4 < -\frac{1}{3-x} < 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{3-x} < 4$$

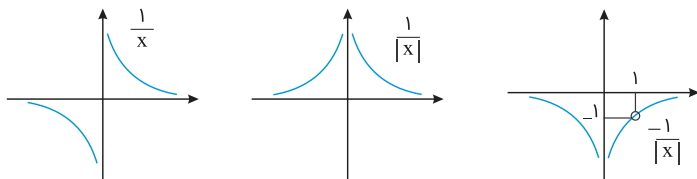
$$x = 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2} < 4$$

$$x = 2 \Rightarrow 0 < 1 < 4$$

فقط همین دو عدد طبیعی در نامعادله صدق می‌کند. ضمناً برای $x > 3$ عبارت $\frac{1}{3-x}$ منفی است.

$$y = \frac{1-x}{x|x|-|x|} = \frac{1-x}{|x|(x-1)} = \frac{-1}{|x|}, x \neq 1, 0$$

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



برد تابع: $(-\infty, 0)$

$$\frac{1}{x} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow D_1 = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\frac{x+1}{x-\frac{1}{x}} \Rightarrow x - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow D_2 = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

$$\Rightarrow D = D_1 \cap D_2 = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$$

$$\frac{2x^2 + 6x + 5}{x^2 + 3x + 2} = \frac{(x+1)^2 + (x+2)^2}{(x+1)(x+2)} = \underbrace{\frac{x+1}{x+2}}_a + \frac{x+2}{x+1} = a + \frac{1}{a}$$

$$\begin{cases} a > 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2 \\ a < 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} \leq -2 \end{cases} \Rightarrow R_f \in \mathbb{R} - (-2, 2)$$

دقت کنید که برد لزوماً مساوی $\mathbb{R} - (-2, 2)$ نیست و زیرمجموعه آن است! برای مثال $y = 2$ عضو برد تابع نیست. از روی نامساوی‌ها دقیق نمی‌توانیم برد را به دست بیاوریم و نیازمند بررسی بیشتر است.

برای آنکه $f(x)$ تابعی گویا شود، باید $\sqrt[3]{x}$ از تابع حذف شود، پس $m = 2 \Rightarrow m - 2 = 0$ در نتیجه داریم:

$$f(x) = \frac{x+2}{2x^2+x-3}$$

$$2x^2+x-3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}, 1\}$$

$$2a+b=2\left(-\frac{3}{2}\right)+1=-2$$

دامنه تابع $f(x)$ به صورت $\mathbb{R} - \{1\}$ است، پس $x = 1$ ریشه مضاعف مخرج است.

$$2x^2 - ax + b = m(x-1)^2 = m(x^2 - 2x + 1) = mx^2 - 2mx + m$$

$$\Rightarrow m = 2, a = 4, b = 2$$

پس $a = 4$ و $b = 2$ است. حالا مقدار $f(a+b)$ را به دست می آوریم.

$$f(a+b) = f(6) = \frac{6+1}{2(6-1)^2} = \frac{7}{2 \times 25} = \frac{7}{50} = \frac{14}{100}$$

اول اینکه مشخص است که $x \neq 0$ می باشد. ضابطه تابع y را با شرط $x \neq 0$ و $y \neq -1$ به دست می آوریم:

$$\frac{y+4}{y+1} = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} (y+4)x = y+1$$

$$\Rightarrow xy + 4x = y+1 \Rightarrow yx - y = 1 - 4x$$

$$\Rightarrow y(x-1) = 1 - 4x \Rightarrow y = \frac{1-4x}{x-1} \Rightarrow x \neq 1$$

دامنه تابع $\{0, 1\} - \mathbb{R}$ است.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1} = \frac{1}{\frac{x^4 + 1}{x^2}} = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2}} \quad (x \neq 0)$$

می دانیم $2 \leq x^2 + \frac{1}{x^2}$ است. بنابراین $\frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2}} \leq \frac{1}{2}$ می باشد. پس $0 < f(x) \leq \frac{1}{2}$ است.

به علاوه به ازای $x = 0$ ، تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$ برابر صفر است. پس برد تابع f شامل صفر هم هست.

$$R_f = [0, \frac{1}{2}]$$

راه حل تستی:

می توانیم از روش رد گزینه استفاده نماییم:

$x = 0 \Leftarrow$ غ. ق. ق $\Leftarrow$ گزینه (۲) حذف می شود.

$x = 1 \Leftarrow$ غ. ق. ق $\Leftarrow$ گزینه (۱) و (۳) حذف می شوند.

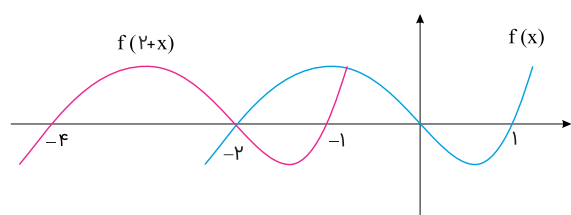
راه حل تشریحی:

$$\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2} \geq 0 \Rightarrow \frac{4 - 9x^2}{2x^2} \geq 0 \Rightarrow 4 - 9x^2 \geq 0 \xrightarrow{x \neq 0} x^2 \leq \frac{4}{9} \xrightarrow{x \neq 0} -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$$

از طرفی چون $x \neq 0$ است، پس گزینه (۴) قابل قبول است.

$$g(x) = \sqrt{-\frac{f(x)}{f(x+2)}} \Rightarrow -\frac{f(x)}{f(x+2)} \geq 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{f(x+2)} \leq 0$$

$$f(x) = 0; \quad x = -2, 0, 1$$



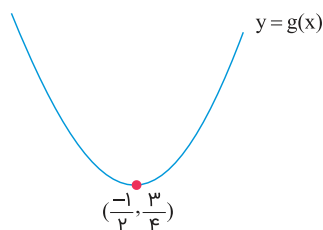
$$f(x+2) = 0; \quad x = -4, -2, -1$$

x	-4	-2	-1	0	1
f(x)	-	-	+	+	-
f(x+2)	-	+	-	+	+
$\frac{f(x)}{f(x+2)}$	+	-	-	+	-

$$D_g = (-4, -2) \cup (-2, -1) \cup [0, 1]$$

دامنه تابع شامل اعداد صحیح ۰، ۱ و ۲ است.

$$g(x) = x^2 + x + 1$$



$$\Rightarrow g(x) \geq \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^2 + x + 1} \geq \sqrt{\frac{3}{4}} \Rightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow 0 < f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow 0 < f(x) \leq \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow R_f = (0, \frac{2\sqrt{3}}{3}]$$

تابع g یک تابع خطی است. باتوجه به نمودار تابع g ، ضابطه آن را به دست می‌آوریم:

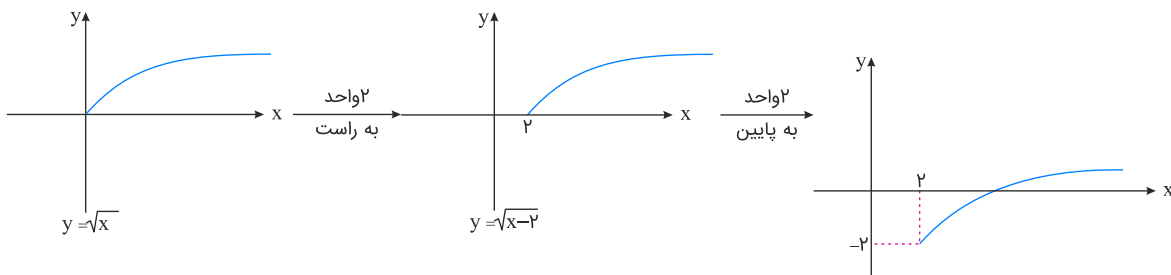
$$m = \frac{3 - 0}{0 - 3} = -1$$

$$y - 0 = -1(x - 3) \Rightarrow y = -x + 3 \Rightarrow g(x) = -x + 3$$

با جایگذاری ضابطه g در f ؛ ضابطه f را به دست می‌آوریم.

$$f(x) = \sqrt{1 - g(x)} - 2 \xrightarrow{g(x) = -x + 3} f(x) = \sqrt{1 - (-x + 3)} - 2 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x - 2} - 2$$

برای رسم نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x - 2} - 2$ ، کافی است نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را ابتدا ۲ واحد به راست ببریم و $y = \sqrt{x - 2}$ و سپس آن را ۲ واحد به پایین انتقال دهیم تا به ضابطه $f(x) = \sqrt{x - 2} - 2$ برسیم.



$$(x + 2) \cdot f(x) \geq 0$$

$$D_g = [2, +\infty) \cup \{-2\}$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x+2$	-	○	+	+
$f(x)$	+	○	-	+
$(x+2)f(x)$	-	○	-	+

$$\sqrt{2 - x^2} : 2 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 2 \Rightarrow |x| \leq \sqrt{2}$$

$$\text{رابطه (I): } -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

$$x - \sqrt{2 - x^2} \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 2 - x^2$$

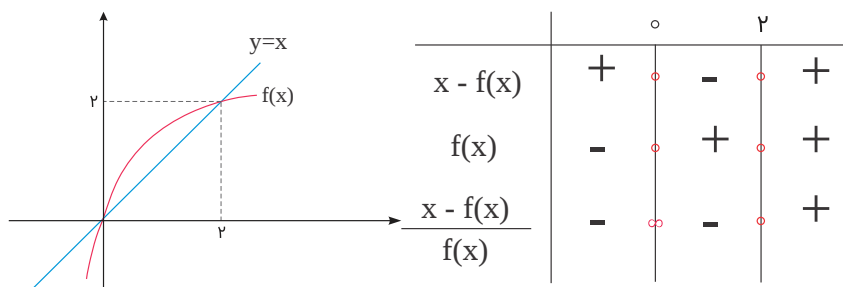
$$\Rightarrow 2x^2 \geq 2 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow |x| \geq 1$$

$$\text{رابطه (II): } x \geq 1, \text{ زیرا نباید } x < 0 \text{ باشد.}$$

$$(I) \cap (II) \Rightarrow D = [1, \sqrt{2}]$$

$$a + \sqrt{2}b = 1 + \sqrt{2}(\sqrt{2}) = 3$$

باتوجه به شکل نمودار تابع $y = x$ در فاصله $(0, 2)$ پایین تر از $f(x)$ قرار می گیرد. پس می توانیم $x - f(x)$ را به کمک آن تعیین علامت کنیم.



$$\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{x}}{3} \geq 0 \Rightarrow \frac{3}{2} \geq \frac{\sqrt{x}}{3} \Rightarrow \sqrt{x} \leq \frac{9}{2} \Rightarrow x \leq \frac{81}{4}$$

از طرفی $x \geq 0$ است، پس:

$$D_f = [0, \frac{81}{4}] = [0, 20.25]$$

اعداد طبیعی موجود در دامنه تابع $\{1, 2, \dots, 20\}$ است.

بنا به شکل، $\sqrt{x}$ را دو واحد به چپ و یک واحد به پایین ببرید. شکل نمودار $f(x)$ مشخص می شود.

$$a = 2, b = -1$$

$$x = 7 : y = \sqrt{7+2} - 1 = 2 \Rightarrow c = 2$$

$$a + b + c = 3$$

$$f \text{ تابع } : x + a \geq 0 \Rightarrow x \geq -a$$

$$g \text{ تابع } : \sqrt{x+1} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} - 2 \geq -2$$

اگر دامنه تابع f با برد تابع g برابر باشد $a = 2$ است. حال محاسبه ریشه مشترک:

$$g(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 2 \Rightarrow x = 3$$

$$f(3) = 0 \Rightarrow b - \sqrt{3+2} = 0 \Rightarrow b = \sqrt{5} \Rightarrow b^2 = 5 \Rightarrow b^2 - a = 3$$

$$-xf(x) \geq 0 \Rightarrow xf(x) \leq 0 \Rightarrow xy \leq 0 \quad (1)$$

رابطه (۱) نشان می دهد که x و y مختلف علامت و یا حداقل یکی از آنها صفر است. یعنی نقاط برخورد با محورها و نقاطی که در ناحیه دوم و چهارم واقع هستند جواب سوال است. باتوجه به صورت سوال، برای x های صحیح منفی فقط $x = -2$ جواب مسئله می باشد.

نکته: برای اینکه دو تابع f و g باهم مساوی باشند، باید $D_f = D_g$ و همچنین ضابطه‌های دو تابع f و g باهم برابر باشند: $f(x) = g(x)$
دامنه تابع f برابر با $D_f = \mathbb{R}$ و ضابطه f به صورت $f(x) = x - 2$ است. به بررسی تک تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$\text{گزینه ۱: } g(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = x-2, \quad D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$\text{گزینه ۲: } h(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x+1} = x-2, \quad D_h = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$\text{گزینه ۳: } i(x) = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^2+2x+4} = x-2, \quad D_i = \mathbb{R}$$

در گزینه ۳ مخرج کسر فاقد ریشه زیرا $\Delta < 0$ است.

$$f(x) = \frac{3(x^2 - x + a)}{x^2 - x + a} = 3 = g(x) = a^3 - 2a + 3$$

$$\Rightarrow a^3 - 2a = 0 \Rightarrow a(a^2 - 2) = 0 \Rightarrow a = 0, \pm\sqrt{2}$$

از طرفی $D_g = \mathbb{R}$ است، برای اینکه دو تابع برابر باشند بایستی دامنه f نیز برابر با $\mathbb{R}$ باشد، پس باید مخرج f فاقد ریشه باشد. داریم:

$$x^2 - x + a \neq 0 \Rightarrow \Delta < 0$$

$$\Rightarrow (-1)^2 - 4(1)(a) = 1 - 4a < 0 \Rightarrow 4a > 1 \Rightarrow a > \frac{1}{4} \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

نکته: برای اینکه دو تابع f و g باهم برابر باشند، باید $D_f = D_g$ و همچنین به ازای هر x از دامنه یکسان ضابطه‌های دو تابع f و g باهم برابر باشند $(f(x) = g(x))$.
باتوجه به نکته و ضابطه تابع f داریم:

$$f(x) = \sqrt{2x-1} + \sqrt{1-2x} + m \Rightarrow D_f : \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \\ 1-2x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_f = \left\{\frac{1}{2}\right\}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2\left(\frac{1}{2}\right)-1} + \sqrt{1-2\left(\frac{1}{2}\right)} + m = m \Rightarrow R_f = \left\{f\left(\frac{1}{2}\right)\right\} = \{m\}$$

پس داریم:

$$D_g = \{k\} \Rightarrow k = \frac{1}{2}, \quad g(k) = -2$$

$$\Rightarrow g\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \Rightarrow g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -2 = m$$

$$\Rightarrow m + 2k = -2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = -2 + 1 = -1$$

جعبه ابزار: توابع براکتی-رابطه آیزنشتاین-برد توابع براکتی
رابطه آیزنشتاین: به ازای هر $n \in \mathbb{Z}$ و $x \in \mathbb{R}$ رابطه زیر برقرار است:

$$[nx] = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right]$$

باتوجه به رابطه آیزنشتاین داریم:

$$\left[\frac{x}{p}\right] + \left[\frac{x+1}{p}\right] = \left[\frac{x}{p}\right] + \left[\frac{x}{p} + \frac{1}{p}\right] = [x]$$

و لذا داریم: $y = \sqrt{[x]} - x$. ابتدا دامنه این تابع را به دست می‌آوریم که باید $[x] - x \geq 0$ باشد. بنابراین:

$$\begin{cases} 0 \leq x - [x] < 1 \\ [x] - x \geq 0 \Rightarrow x - [x] \leq 0 \Rightarrow x = [x] \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

بنابراین تابع، یک تابع ثابت $y = 0$ (با دامنه اعداد صحیح $x = [x]$) است. دامنه‌های تابع‌های موجود در گزینه‌های "۱"، "۳" و "۴" برابر $\mathbb{R}$ هستند و با تابع صورت سؤال که دامنه‌اش $\mathbb{Z}$ است برابر نیستند. دامنه تابع موجود در گزینه "۲" نیز برابر $\mathbb{Z}$ و ضابطه آن $y = 0$ چالش سؤال: استفاده از رابطه آیزنشتاین-رد گزینه‌های دیگر

نکته: برای اینکه دو تابع f و g برابر باشند بایستی $D_f = D_g$ و همچنین به ازای هر x از دامنه یکسان f و g داشته باشیم: $f(x) = g(x)$.
به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$\text{گزینه ۱: } \begin{cases} D_g = \mathbb{R} , & g(x) = x \\ D_f = \mathbb{R} , & f(x) = \sqrt{x^2} = |x| \end{cases} \Rightarrow f(x) \neq g(x)$$

$$\text{گزینه ۲: } \begin{cases} D_g = \mathbb{R} \\ D_f = \mathbb{R} - \{0\} \end{cases} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

$$\text{گزینه ۳: } \begin{cases} D_g = \mathbb{R} \\ D_f = \mathbb{R} - \{1\} \end{cases} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

$$\text{گزینه ۴: } \begin{cases} D_g = \mathbb{R} , & g(x) = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -3x & ; x < 0 \end{cases} \\ D_f = \mathbb{R} , & f(x) = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -3x & ; x < 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

نکته: برای اینکه دو تابع f و g برابر باشند، باید $D_f = D_g$ و به ازای هر x از دامنه یکسان $f(x) = g(x)$ باشد.
از آنجاکه $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ پس $x = 1$ باید تنها جواب معادله درجه دوم $x^2 + bx + 1 = 0$ باشد، پس داریم:

$$\begin{aligned}x^2 + bx + 1 &= (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1 \\ \Rightarrow b &= -2 \Rightarrow g(x) = \frac{cx - 1}{(x - 1)^2} \\ g(x) = f(x) &\Rightarrow \frac{cx - 1}{(x - 1)^2} = \frac{a}{(x - 1)} \Rightarrow \frac{cx - 1}{x - 1} = \frac{a}{1} \\ \Rightarrow cx - 1 &= ax - a \Rightarrow a = c, a = 1 \Rightarrow c = 1 \\ \Rightarrow a + b + c &= 1 - 2 + 1 = 0\end{aligned}$$

دامنه هر دو تابع اعداد حقیقی است، پس برای برابری دو تابع باید به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $f(x) = g(x)$ باشد، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}x \neq -2 : f(x) &= \frac{(x - 3)(x + 2)}{(x + 2)} = x - 3 = g(x) \\ x = -2 : f(-2) &= 2m - 3, g(-2) = -2 - 3 = -5 \\ \Rightarrow f(-2) &= g(-2) \Rightarrow 2m - 3 = -5 \Rightarrow 2m = -2 \Rightarrow m = -1\end{aligned}$$

در گزینه‌های ۲ و ۴ دو تابع دامنه‌های نابرابر دارند و در گزینه ۳ دامنه‌ها برابرند اما مقادیر برابر نیستند.

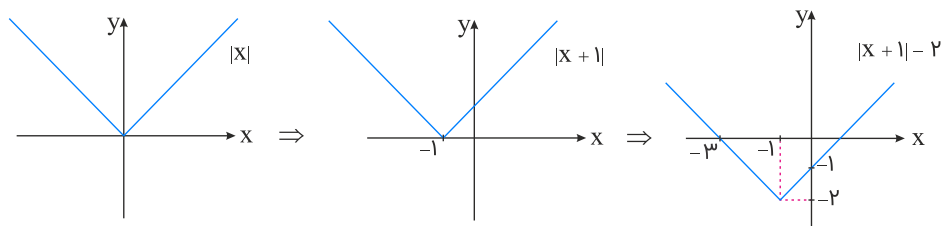
$$f(x) = \sqrt{x^2} = |x| \neq g(x)$$

اما گزینه (۱) صحیح است.

$$f(x) = \frac{x}{x^2}, g(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow D_f = D_g, f(x) = g(x)$$

گزینه "۱": $D_f \neq D_g$
گزینه "۲": $f(-1) \neq g(-1)$
گزینه "۴": $D_f \neq D_g$

نمودار $f(x) = |x + a| - b$ از انتقال $f(x) = |x|$ به اندازه a واحد به چپ و b واحد به پایین به دست می‌آید.



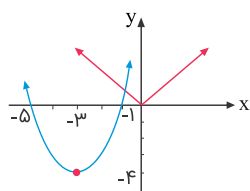
$$y = x^2 \xrightarrow{\text{واحد به چپ}} y = (x + 2)^2 \xrightarrow{\text{واحد به پایین}} y = (x + 2)^2 - 3$$

برای پیدا کردن محل تلاقی نمودار سهمی با محور y ‌ها باید x را برابر صفر قرار دهیم:

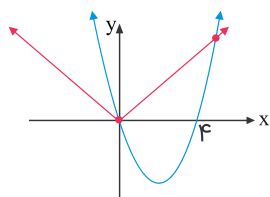
$$x = 0 \Rightarrow y = (0 + 2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$$

$$y = x^2 + 6x + 5 \Rightarrow y = (x + 3)^2 - 4$$

هر دو نمودار را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



اگر ۵ واحد نمودار را به راست منتقل کنیم، دو تابع در $x = 0$ برخورد می‌کنند و به مطلوب سؤال می‌رسیم.

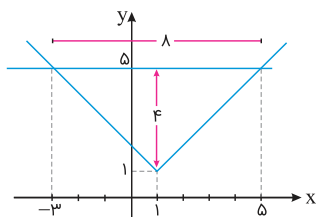


برای مشخص کردن سطح محصور، نمودار توابع $f(x)$ و $g(x)$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.
 گام اول: مختصات نقطه شکست تابع $f(x) = |x - 1| + 1$ نقطه $(1, 1)$ است.
 گام دوم: ضابطه توابع f و g را مساوی یکدیگر قرار می‌دهیم تا طول نقاط برخورد نمودار دو تابع به دست آید.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow |x - 1| + 1 = 5 \Rightarrow |x - 1| = 4$$

$$\Rightarrow x - 1 = \pm 4 \Rightarrow x = \pm 4 + 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 5 \end{cases}$$

به کمک اطلاعات به دست آمده، نمودار توابع را رسم کرده و سطح محصور را مشخص می‌کنیم.



سطح محصور مثلثی به ارتفاع ۴ و قاعده ۸ است.

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{2} \Rightarrow S = \frac{4 \times 8}{2} = 16$$

در واقع باید تابع $f(x)$ را به صورت $f(x + 1) + k$ تبدیل کنیم:

$$f(x + 1) = 3(x + 1)^2 - 6(x + 1) + 1 = 3(x^2 + 2x + 1) - 6x - 6 + 1 = 3x^2 - 2$$

$$f(x + 1) + k = 3x^2 - 2 + k = 3x^2$$

پس $k = 2$ است.

چون f تابع همانی است، پس $f(x) = x$ می‌باشد. اکنون تغییرات داده‌شده را اعمال می‌کنیم:

$$\left| \frac{1}{f(x-a)} \right| - 2 = \frac{1}{|f(x)|} \Rightarrow \left| \frac{1}{x-a} \right| - 2 = \left| \frac{1}{x} \right| \xrightarrow{x=\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\left| \frac{\sqrt{2}}{2} - a \right|} - 2 = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{|\sqrt{2} - 2a|} = 2 + \sqrt{2}$$

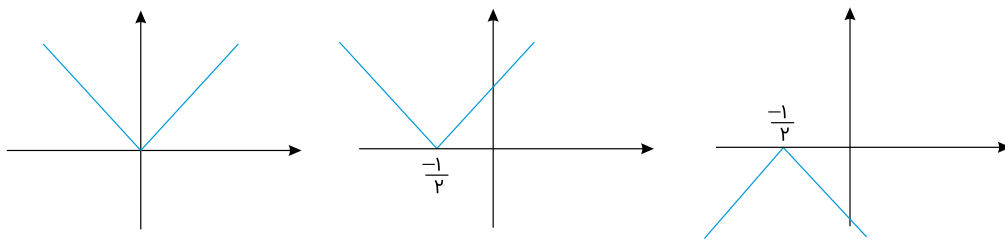
$$\Rightarrow |\sqrt{2} - 2a| = \frac{2}{2 + \sqrt{2}} \times \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2} - 2a = 2 - \sqrt{2} \\ \sqrt{2} - 2a = \sqrt{2} - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2} - 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$f(x+a) = 3 \xrightarrow{a=1} x+1 = 3 \Rightarrow x = 2$$

$$f(x+a) = 3 \xrightarrow{a=\sqrt{2}-1} x-1+\sqrt{2} = 3 \Rightarrow x = 4 - \sqrt{2}$$

$$\text{اختلاف مقادیر} = 4 - \sqrt{2} - 2 = 2 - \sqrt{2}$$

$$y = -\frac{1}{2} \left| 2 \left(x + \frac{1}{2} \right) \right| = -\frac{1}{2} \times 2 \left| x + \frac{1}{2} \right| \Rightarrow y = -\left| x + \frac{1}{2} \right|$$



بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

ضابطه سهمی اولیه را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y_1 = 2(x-1)^2 - 3$$

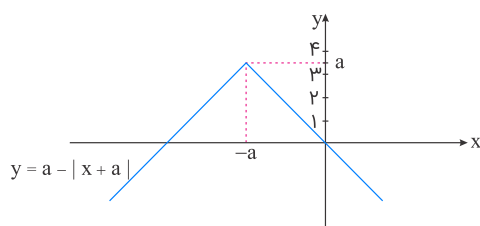
حال با انتقال به چپ و انتقال به پایین این سهمی داریم:

$$y_2 = 2((x+1)-1)^2 - 3 - 2 \Rightarrow y_2 = 2x^2 - 5$$

حال کافی است معادله $y_1 = y_2$ را حل کنیم:

$$2x^2 - 4x - 1 = 2x^2 - 5 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$$

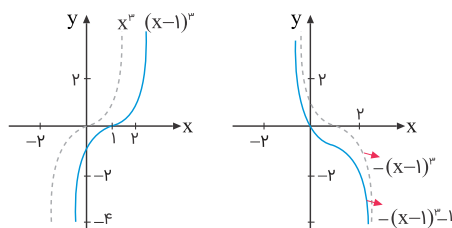
برد تابع $y = |x + a|$ بازه $[0, +\infty)$ و برد تابع $y = -|x + a|$ بازه $(-\infty, 0]$ است و در نتیجه برد تابع $y = a - |x + a|$ بازه $(-\infty, a]$ خواهد بود. برای اینکه برد این تابع شامل سه عدد طبیعی باشد، لازم است $3 \leq a < 4$ باشد.



برای رسم نمودار تابع g از روی نمودار f ، کافی است نمودار f را یک واحد به سمت چپ و دو واحد به سمت بالا منتقل کنیم. همین فرآیند را برای نقطه A انجام دهیم به نقطه $A'(-2, 2)$ روی نمودار تابع g می‌رسیم.

$$1 - x = t \Rightarrow x = 1 - t$$

$$f(1 - x) = x^3 - 1 \Rightarrow f(t) = (1 - t)^3 - 1 = -(t - 1)^3 - 1$$



نمودار $f(x)$ از ناحیه‌های اول و سوم نمی‌گذرد.

$$-\frac{b}{2a} = \frac{-7}{10} \Rightarrow 10b = 14a \Rightarrow 70 = 14a \Rightarrow a = 5$$

$$\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(49 + 20)}{4 \times 5} = \frac{-69}{20} = -3/45$$

اگر $k = 1$ باشد، برد دو تابع باهم برابر خواهند بود.

$$k = a^2 - 3a + 3 \xrightarrow{k=1} a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a_1 a_2 = 2$$

برای رسم $f^{-1}(2x+1)$ مراحل زیر را به ترتیب دنبال می‌کنیم.

$$f(x) \xrightarrow[\text{قرینه می‌کنیم}]{y=x \text{ نسبت به خط}} f^{-1}(x) \xrightarrow[\text{یک واحد به چپ}]{\text{یک واحد به چپ}} f^{-1}(x+1)$$

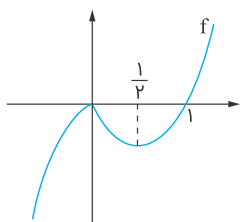
$$\xrightarrow[\text{طول نقاط را نصف می‌کنیم}]{\text{طول نقاط را نصف می‌کنیم}} f^{-1}(2x+1)$$

(تذکر: صورت سوال ایراد دارد. باتوجه به اینکه کلید سنجش گزینه "۲" است، شکل درست آن به این صورت باید باشد:

تابع $y = (x-1)|x|$ در بزرگ‌ترین بازه $[a, b]$ اکیداً نزولی است. مقدار $a+b$ کدام است؟)

$$y = (x-1)|x| = \begin{cases} x^2 - x & ; x \geq 0 \\ -x^2 + x & ; x < 0 \end{cases}$$

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



تابع f در بزرگ‌ترین بازه $[0, \frac{1}{2}]$ اکیداً نزولی است، بنابراین:

$$a+b = \frac{1}{2}$$

$$y = 2^{|\sin x|} \xrightarrow{\text{سمت راست } \frac{\pi}{2}} y = 2^{|\sin(x - \frac{\pi}{2})|} = 2^{|\cos x|} \xrightarrow{\text{به پایین } \frac{3}{2}} y = 2^{|\cos x|} - \frac{3}{2}$$

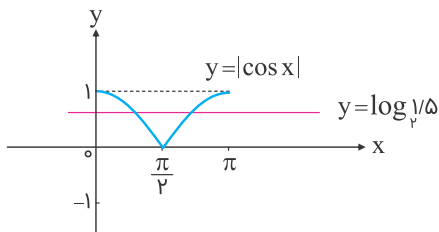
تعداد محل تقاطع نمودار با محور x ها را می‌خواهیم، بنابراین تابع حاصل را برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$y = 2^{|\cos x|} - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 2^{|\cos x|} = \frac{3}{2}$$

حال از دو طرف $\log_2$ می‌گیریم، در نتیجه:

$$|\cos x| = \log_2 \frac{3}{2}$$

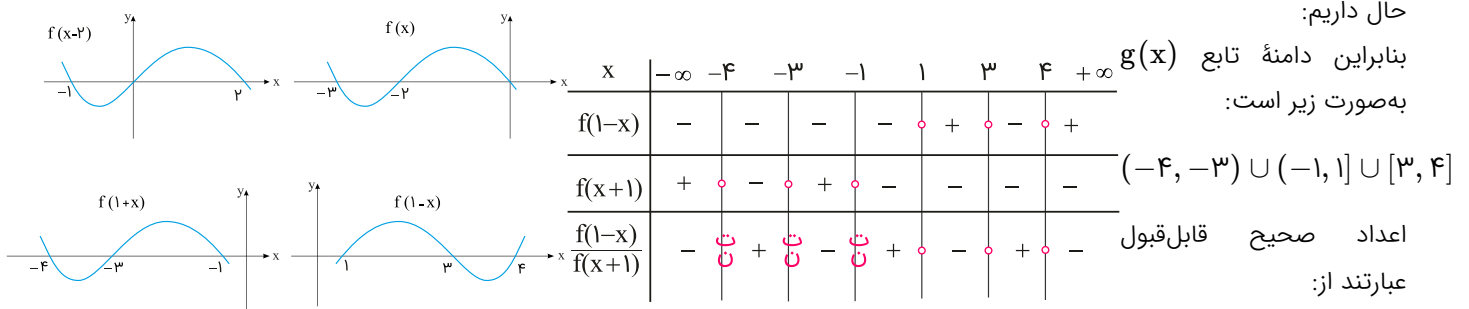
تابع $\log_2 x$ صعودی است و $\log_2 2 = 1$ می‌باشد، بنابراین $0 < \log_2(1/5) < 1$ است. حال نمودار $|\cos x|$ و $\log_2(1/5)$ را رسم می‌کنیم:



پس معادله $|\cos x| = \log_2 \frac{3}{2}$ در فاصله $[0, \pi]$ دو جواب دارد.

$$g(x) = \sqrt{\frac{f(1-x)}{f(x+1)}} \Rightarrow \frac{f(1-x)}{f(x+1)} \geq 0$$

باتوجه به نمودار $f(x-2)$ ، $f(x-1)$ ، توابع $f(1-x)$ و $f(x+1)$ را رسم می‌کنیم:



$$x = 0, x = 1, x = 3, x = 4$$

تابع f اکیداً صعودی است و دامنه آن، مجموعه‌ای از مقادیر مثبت است، بنابراین داریم:

$$2m^2 - 9m - 2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} m > \frac{9 + \sqrt{97}}{4} \\ m < \frac{9 - \sqrt{97}}{4} \end{cases} \quad (1)$$

$$m^2 - 4m + 4 > 0 \Rightarrow (m - 2)^2 > 0 \Rightarrow m \in \mathbb{R} - \{2\} \quad (2)$$

$$f(2m^2 - 9m - 2) < f(m^2 - 4m + 4)$$

$$\xrightarrow{\text{صعودی اکید}} 2m^2 - 9m - 2 < m^2 - 4m + 4$$

$$\Rightarrow m^2 - 5m - 6 < 0 \Rightarrow (m + 1)(m - 6) < 0 \Rightarrow m \in (-1, 6) \quad (3)$$

$$(1) \cap (2) \cap (3) \Rightarrow m \in (-1, \frac{9 - \sqrt{97}}{4}) \cup (\frac{9 + \sqrt{97}}{4}, 6) \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = 5$$

در بازه به‌دست‌آمده، فقط یک عدد صحیح ۵ وجود دارد.

چون تابع اکیداً نزولی است، پس:

$$m^2 - m - 5 > -3 + 2m - m^2 \Rightarrow 2m^2 - 3m - 2 > 0$$

ریشه‌های عبارت فوق عبارت‌اند از:

$$m = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

m	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$P(x)$	+	-	+	+

$$p(x) > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$$

چون دامنه منفی است، پس:

$$m^2 - m - 5 < 0 \Rightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2} \xrightarrow{\sqrt{21} \simeq 4/5} -1/5 < m < 2/5$$

$$-m^2 + 2m - 3 < 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow m \in \mathbb{R}$$

لازم است در کل $-1/5 < m < 2/5$ یا $2 < m < 2/5$ باشد، یعنی فقط $m = -1$ قابل قبول است.

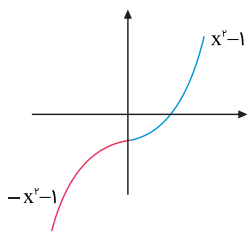
$$D_g : (-\infty, -1] \cup [0, 1]$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	-	-	○	+	+
$(x-1)$	-	-	○	-	+
$f(x)$	+	○	-	-	-
$h(x) = x(x-1)f(x)$	+	○	-	○	-

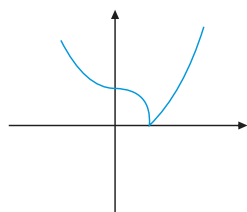
تابع $\log x$ صعودی اکید و در نتیجه تابع $\log(-x)$ نزولی اکید است؛ حال اگر $f(x)$ صعودی اکید باشد، بایستی:

$$\frac{m-1}{m+1} < 0 \Rightarrow -1 < m < 1 \Rightarrow |m| < 1$$

$$y = x|x| - 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 & ; x \geq 0 \\ -x^2 - 1 & ; x < 0 \end{cases}$$

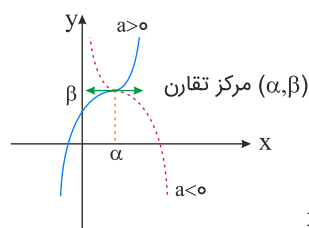


$$|y| = |x|x| - 1|$$



برای نوشتن ضابطه تابع درجه سوم که نمودار آن به صورت زیر بوده و مرکز تقارنش نقطه (α, β) باشد، کافی است از ضابطه $f(x) = a(x - \alpha)^3 + \beta$ استفاده نماییم. حال با داشتن یک نقطه دیگر از این تابع و جایگذاری آن در تابع f ، به راحتی مقدار a به دست می‌آید.
داریم:

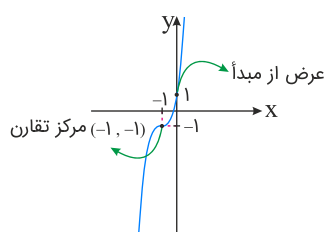
$$\Rightarrow f(x) = a(x - \alpha)^3 + \beta$$



چون در شکل داده شده مرکز تقارن نقطه $(-1, -1)$ است، پس داریم:

$$f(x) = a(x + 1)^3 - 1$$

حال کافی است نقطه عرض از مبدأ تابع f را در آن صدق دهیم تا a مشخص شده. داریم:



$$\xrightarrow{\text{را در } f \text{ صدق می‌دهیم}} a(1)^3 - 1 = 1 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = 2(x + 1)^3 - 1 = 2(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - 1$$

$$= 2x^3 + 6x^2 + 6x + 1$$

در آخر مقادیر a ، b ، c و d را نظیر به نظیر برابر با ضرایب جملات x^3 ، x^2 ، x و عدد ثابت تابع به دست آمده قرار می‌دهیم. داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 6 \\ c = 6 \\ d = 1 \end{cases} \Rightarrow abcd = 2 \times 6 \times 6 \times 1 = 72$$

اول ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$y = \underbrace{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}_{(x+1)^3} - 1 \Rightarrow y = (x+1)^3 - 1$$

انتقال‌ها را روی تابع انجام می‌دهیم:

$$y = (x+1)^3 - 1 \xrightarrow[\text{واحد راست}]{x \rightarrow x-1} y = (x-1+1)^3 - 1 = (x-1)^3 - 1 \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } y]{x \rightarrow -x} y = (-x-1)^3 - 1$$

$$\xrightarrow[\text{واحد به بالا}]{} y = -(x+1)^3 + 1$$

تابع به دست آمده را با خط $y = 10$ قطع می‌دهیم:

$$10 = -(x+1)^3 + 1 \Rightarrow (x+1)^3 = -8 \Rightarrow x+1 = -2 \Rightarrow x = -3$$

$$f(x) = 4x - x^2$$

$$\xrightarrow[\text{منفی انتقال می‌دهیم}]{\text{واحد در جهت}} f(x+1) = 4(x+1) - (x+1)^2 = -x^2 + 4$$

$$f(x) = f(x+1) \Rightarrow 4x - x^2 = -x^2 + 4 \Rightarrow x = 1$$

$$f(x) = 4x - x^2 \xrightarrow{x=1} f(1) = 3 \Rightarrow A(1, 3) \text{ نقطه برخورد}$$

$$OA = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

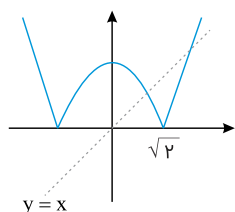
$$-2 \leq x < 1 \Rightarrow -4 \leq 2x < 2 \Rightarrow -3 \leq 2x+1 < 3$$

پس دامنه $f(x)$ برابر $[-3, 3]$ است. حالا دامنه $f(\sqrt{x})$ را می‌خواهیم.

$$-3 \leq \sqrt{x} < 3 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x} < 3 \Rightarrow 0 \leq x < 9$$

$$|x^2 - 2| - x > 0 \Rightarrow |x^2 - 2| > x \quad (1)$$

نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم:



ملاحظه می‌کنید که یک برخورد در بازه $(0, \sqrt{2})$ و یک برخورد در بازه $(\sqrt{2}, +\infty)$ است:

$$\begin{aligned} 0 < x < \sqrt{2} : |x^2 - 2| &= 2 - x^2 \\ \Rightarrow 2 - x^2 &= x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \xrightarrow{0 < x < \sqrt{2}} x = 1 \\ x > \sqrt{2} : |x^2 - 2| &= x^2 - 2 \\ \Rightarrow x^2 - 2 &= x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \xrightarrow{x > \sqrt{2}} x = 2 \end{aligned}$$

پس جواب نامعادله (۱) که همان دامنه تابع است به صورت زیر خواهد بود:

$$D = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$

$$g(x) = \sqrt{\sqrt{x} + 3} + k \xrightarrow{g(1)=1} \sqrt{1+3} + k = 1 \Rightarrow k = -1$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{\sqrt{x} + 3} - 1 \Rightarrow -g(x) = 1 - \sqrt{\sqrt{x} + 3} \Rightarrow -g(x+4) = 1 - \sqrt{\sqrt{x+4} + 3} \\ \xrightarrow{x=0} y &= 1 - \sqrt{2+3} = 1 - \sqrt{5} \end{aligned}$$

جعبه ابزار: تابع درجه ۳ - فرم کلی تابع درجه ۳
در تابع $g(x) = f(x) - 48$ داریم:

$$g(1) = g(2) = g(3) = 0$$

بنابراین $x = 1$ و $x = 2$ و $x = 3$ ریشه‌های تابع درجه سوم g خواهند بود، بنابراین:

$$\begin{aligned} g(x) &= a(x-1)(x-2)(x-3) \\ \Rightarrow f(x) - 48 &= a(x-1)(x-2)(x-3) \\ \Rightarrow f(x) &= a(x-1)(x-2)(x-3) + 48 \\ \Rightarrow f(-1) &= 0 \Rightarrow 0 = a(-2)(-3)(-4) + 48 \Rightarrow a = 2 \\ \Rightarrow f(x) &= 2(x-1)(x-2)(x-3) + 48 \\ \Rightarrow f(0) &= -12 + 48 = 36 \\ a + f(0) &= 2 + 36 = 38 \end{aligned}$$

چالش سؤال: تبدیل تابع f به تابع g و نوشتن فرم کلی معادله درجه ۳

$$g(x) = \sqrt{4 - (x - k + 2)} + k = \sqrt{-x + k + 2} + k$$

تابع $g(x)$ وارون خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند و همچنین با فرض اینکه نقطه برخورد تابع و وارونش بر روی خط $y = x$ قرار دارد، بنابراین $g(1) = 1$ حال داریم:

$$A(1, 1) \in g(x) \Rightarrow \sqrt{1 + k} + k = 1 \Rightarrow k = 0$$

$$h(x) = y - 1 \Rightarrow \sqrt{-x + 2} - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

جدول تعیین علامت g به صورت زیر است.

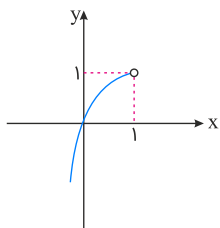
x	0		3	
x^2	+	+	+	+
$f(x)$	+	+	+	-
$\sqrt{x^2 f(x)}$	+	+	+	-

$$\Rightarrow D_{\sqrt{x^2 f(x)}} = (-\infty, 3]$$

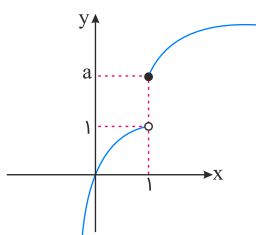
$$x = 0, 1, 2, 3$$

اعداد ۰، ۱، ۲ و ۳ پذیرفته هستند.

باتوجه به اینکه $1 + (x-1)^2 = x^2 - 2x + 2$ ، نمودار این ضابطه را در $x < 1$ رسم می‌کنیم.



برای آنکه تابع f اکیداً صعودی باشد، کافی است عرض نقطهٔ توپُر، از عرض نقطهٔ توخالی بزرگ‌تر یا مساوی باشد (در سایر نقاط هر دو ضابطه روند صعودی خود را طی می‌کند و نیازی به بررسی نیست): $a \geq 1$. بنابراین یکی از حالت‌های نمودار می‌تواند به صورت زیر باشد:



تابع f اکیداً نزولی می‌باشد، بنابراین کافی است ضریب x^3 منفی باشد:

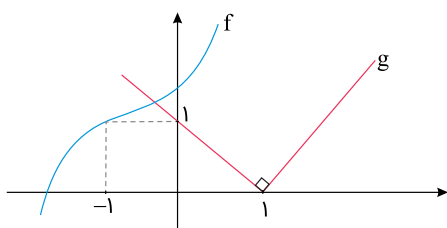
$$-9 + k^2 < 0 \Rightarrow k^2 < 9 \Rightarrow -3 < k < 3$$

$$\xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 0, \pm 1, \pm 2 \Rightarrow k \text{ مقادیر } 0$$

f را به مکعب کامل تبدیل می‌کنیم:

$$f(x) = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + 1 = (x+1)^3 + 1$$

مرکز تقارن تابع f برابر $(-1, 1)$ است.



باتوجه به نمودار، دو تابع f و g در یک نقطه متقاطع‌اند.

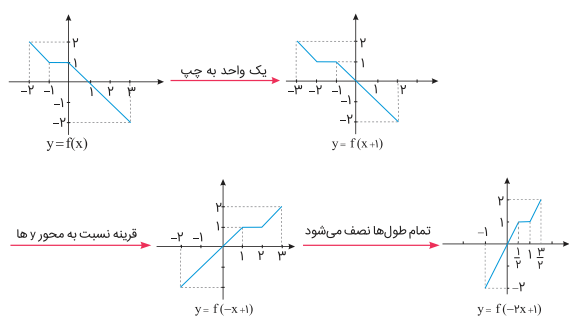
فرض می‌کنیم $\sqrt[3]{9\cos^2(x) - 1} = A$ باشد.

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 9\cos^2(x) - 1 \leq 8 \Rightarrow -1 \leq A \leq 2$$

تابع موردنظر به صورت $g(A) = 2^A - 2^{-A}$ است. هر دو تابع 2^A و 2^{-A} صعودی اکیدند، پس مجموع آن‌ها صعودی اکید خواهد بود.

$$b = g(2) = 2^2 - 2^{-2} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

$$a = g(-1) = 2^{-1} - 2^1 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \Rightarrow b - a = \frac{15}{4} + \frac{3}{2} = \frac{21}{4}$$



$$y = f(|x - 1|) = \begin{cases} f(x - 1) & ; x \geq 1 \\ f(-(x - 1)) & ; x < 1 \end{cases}$$

برای رسم نمودار $y = f(|x - 1|)$ ابتدا نمودار f را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم، سپس قسمتی از نمودار که در سمت چپ خط $x = 1$ وجود دارد را حذف کرده و قرینهٔ قسمت باقی‌مانده را نسبت به خط $x = 1$ رسم می‌کنیم.