

جزوه تدریس

به سبک استاد علی داودوندی رتبه ۶۱ کنکور



برای استفاده بهتر از این جزوه ابتدا ویدیو مربوط به این مبحث را در آپارات یا یوتیوب مشاهده کنید. حتی اگر بخش کوچکی از این مبحث رو مدنظر دارید ببینید از روی **تایم لاین** های مشخص شده میتوانید آن را پیدا کنید.

 ALIDAVOODVANDI.IR

 [ALI.DAVOODVANDI](https://www.instagram.com/ALI.DAVOODVANDI)

 [ALI.DAVOODVANDI](https://www.youtube.com/ALI.DAVOODVANDI)

 [ALI.DAVOODVANDI](https://www.tiktok.com/ALI.DAVOODVANDI)

 ۰۹۳۸۳۱۶۵۳۵۴

 [ALI.DAVOODVANDI](https://www.telegram.me/ALI.DAVOODVANDI)



ایستگاه ۱: معادلات گویا و گنگ

معادله‌های گویا یا معادله‌های کسردار!

تعریف: یک معادله را در نظر بگیرید که تمامی عبارت‌های صورت و مخرج آن چند جمله‌ای باشند و حداقل در یکی از مخرج‌ها مجهول را داشته باشیم. چنین معادله‌ای را معادله کسری یا گویا می‌گوییم، مثل

$$\frac{2x+1}{x} = \frac{x+3}{4}$$

روش حل معادله گویا

برای حل کردن یک معادله گویا، به ترتیب مراحل زیر را اجرا می‌کنیم:

۱- تمامی عبارت‌های جبری و یا عددهای موجود در رابطه را به یک سمت تساوی منتقل کنید، طوری که یک عبارت مساوی صفر، حاصل شود.

۲- حالا از عبارت‌های به وجود آمده، مخرج مشترک گرفته و ساده کنید تا برسید به یک کسر که مساوی صفر

شده، **این طوری:** $\frac{A}{B} = 0$.

۳- صورت کسر را مساوی صفر قرار دهید و آن را حل کرده و تمامی ریشه‌ها را لیست کنید.

۴- حالا وقت کنترل نهایی است؛ هر ریشه‌ای که درآورده‌اید و در بالا لیست کرده بودید را به جای x ‌های مخرج قرار دهید، هر کدام از آن‌ها که مخرج را صفر نکند، قابل قبول است...

دقت: x ‌ای که در می‌آورید باید عضو دامنه باشد.

! گاهی معادله گویا به فرم یک تناسب است، که در این مورد می‌توانیم با طرفین وسطین کردن، معادله را حل کنیم...

تست: معادله $\frac{x}{10} + \frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{2x-2}$ چند ریشه حقیقی دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

هیچ (۱)

پاسخ:

$$\frac{x}{10} + \frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{2x-2} \xrightarrow{\text{همه رو بیار سمت چپ}} \frac{x}{10} + \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{2x-2} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک بگیر}} \frac{x(x-1) + 10 - 5(x+1)}{10(x-1)} = 0 \xrightarrow{\text{ساده کن}} \frac{x^2 - x + 10 - 5x - 5}{10(x-1)} = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 6x + 5}{10(x-1)} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{صورت رو مساوی صفر بذار}} x^2 - 6x + 5 = 0 \xrightarrow[\text{جمع ضرایب صفره}]{\text{حل کن}} x = 1, 5$$

یکی $\rightarrow$ تعداد ریشه فقط $x = 5$ ، مخرج را صفر نمی کند $\rightarrow$ چک کردن در مخرج

■ اگر موقع ساده کردن عبارت های کسری، خواستید عبارتی را از صورت و مخرج یک کسر ساده کنید، با خیال راحت این کار را بکنید و البته مطمئن باشید که ریشه این عبارت قابل قبول نیست، چون در دامنه نیست! **بین:**

$$\frac{x(x-1)}{(x^2-2)(x-)} = 1 \xrightarrow[\text{ساده کن}]{x \neq 1} \frac{x}{x^2-2} = 1 \Rightarrow x = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \xrightarrow{\text{حل کن}} x = -1, 2 \xrightarrow{\text{چک کردن در مخرج}} x = 2, -1$$

قق

■ گاهی در معادله کسری داده شده، مخرج ها عبارت های درجه دو و یک هستند و به ظاهر، مخرج مشترک گیری کار سختی به نظر می رسد! اما در این گونه موارد بهتر است اول تمام مخرج ها را در صورت امکان، با اتحادها تجزیه کنیم، گاهی هم یک فاکتورگیری معمولی کافی است! بعدش بین مخرج های حاصل به راحتی ک.م.م بگیریم؛ مخرج مشترک مناسب یعنی در بین چندین عبارت جبری موجود، عبارت های مشترک را با توان بیشتر انتخاب کن و تمام عبارت های غیرمشترک را هم بردار و همگی را در هم ضرب کن....



تست: معادله $\frac{2x+1}{x^2-x-12} + \frac{3}{8-2x} = -\frac{1}{8}$ چند ریشه دارد؟

۳ (۴

۲ (۳

۱ (۲

هیچ (۱

$$\frac{2x+1}{x^2-x-12} + \frac{3}{8-2x} = -\frac{1}{8} \xrightarrow{\text{مخرج هارو تجزیه کن}} \frac{2x+1}{(x+3)(x-4)} + \frac{3}{-2(x-4)} = -\frac{1}{8}$$

$$\xrightarrow{\text{همه رو بیار سمت چپ}} \frac{2x+1}{(x+3)(x-4)} + \frac{3}{-2(x-4)} + \frac{1}{8} = 0 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک بگیر م.م.ک}} \frac{-8(2x+1) + 3 \times 4(x+3) - (x+3)(x-4)}{-8(x+3)(x-4)} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{صورت رو مساوی صفر بذار}} \frac{8(2x+1)}{16x+8} + \frac{12(x+3)}{12x+36} - \frac{(x+3)(x-4)}{x^2-x-12} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} -x^2 - 3x + 40 = 0 \xrightarrow{x(-1)} x^2 + 3x - 40 = 0 \xrightarrow{\text{حل کن تجزیه}} (x-5)(x+8) = 0 \Rightarrow x = 5, -8$$

۲ تا $\xrightarrow{\text{تعداد ریشه ها}} \xrightarrow{\text{هیچ کدوم، مخرجی را صفر نمی کنند}} \xrightarrow{\text{چک در مخرج}}$

ساده کردن از طرفین تساوی؛ با احتیاط ساده کنید!

اگر در جریان حل یک معادله، خواستید عبارتی را از دو طرف تساوی ساده کنید و اصطلاحاً آن را خط بزنید، خیلی باید حواستان باشد، چون باید آن عبارت را مساوی صفر گذاشته و ریشه اش را به عنوان یکی از جواب های معادله، اعلام کنید...

! اگر خواستید عبارتی را از دو طرف تساوی خط بزنید که در موقعیت مخرج قرار داشت با خیال راحت ساده کنید و ریشه اش هم قطعاً قبول نیست، **بین:**

$$\frac{2x}{3(x-1)} \cdot \frac{x^2-32}{x-1} \Rightarrow \frac{2x}{3} = \frac{x^2-32}{1} \Rightarrow 3x^2-96=2x \Rightarrow 3x^2-2x-96=0 \xrightarrow{\text{حل کن با روش } \Delta} x = 16, -\frac{16}{3}$$

دقت: احتیاط در ساده کردن از دو طرف تساوی و ترس از دست دادن ریشه، فقط مال صورته!!

تست: معادله $\frac{x(x-3)(x+5)}{x+1} = \frac{x^2-25}{3}$ چند ریشه دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

هیچ

پاسخ:

$$\frac{x(x-3)(x+5)}{x+1} = \frac{x^2-25}{3} \xrightarrow[\text{تجزیه کن}]{\text{اتحاد مزدوج}} \frac{x(x-3)(x+5)}{x+1} = \frac{(x-5)(x+5)}{3}$$

$$\xrightarrow[\text{ساده کن}]{\text{طرفین وسطین کن}} \frac{x(x-3)}{x+1} = \frac{x-5}{3} \rightarrow 3x^2 - 9x = x^2 - 4x - 5 \rightarrow 2x^2 - 5x + 5 = 0$$

$$\Delta = -15 \rightarrow \text{ریشه ندارد}$$

پس تنها ریشه، همان $x = -5$ است.

■ اگر تست بگویید $x = k$ ، ریشه معادله‌ای می‌باشد، منظور این است که این عدد در معادله صدق می‌کند.

دقت: $x = k$ ریشه معادله است، یعنی اگر به جای تمام x های معادله بگذاریم k ، عبارت حاصل درست است...

تست: اگر $x = 2$ جواب معادله $\frac{x}{a-x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$ باشد، در این صورت مقدار a چقدر است؟

۴ (۴)

۱ (۳)

-۲ (۲)

صفر

پاسخ:

$$x = 2 \xrightarrow{\text{بذار در معادله}} \frac{2}{a-2} + \frac{a-2}{2} = \frac{a}{2} \xrightarrow{\text{همه رو بیار سمت چپ}} \frac{2}{a-2} + \frac{a-2}{2} - \frac{a}{2} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک بگیر}} \frac{2(2) + (a-2)(a-2) - a(a-2)}{2(a-2)} = 0$$

$$\xrightarrow[\text{ساده کن}]{\text{صورت را مساوی صفر بذار}} 4 + a^2 - 4a + 4 - a^2 + 2a = 0 \Rightarrow -2a + 8 = 0 \Rightarrow a = 4$$



معادله‌های گویا در قالب مسئله؛

اگر شخص اول، کار مشخصی را به تنهایی در A ساعت انجام دهد و شخص دوم نیز همان کار را به تنهایی در B ساعت تمام کند، این دو نفر اگر با هم مشغول به آن کار شوند در مدت $\frac{AB}{A+B}$ ساعت، کار را تحویل می‌دهند...

اینم دلیلش: در مدت یک ساعت، شخص اول $\frac{1}{A}$ از کار و شخص دوم $\frac{1}{B}$ از کار را انجام می‌دهند، پس در مدت ۱ ساعت و با کار هر دوی آن‌ها با هم، به میزان $\frac{1}{A} + \frac{1}{B}$ از کار تمام می‌شود، با یک تناسب ساده مشخص می‌شود که کل کار در مدت $\frac{1}{\frac{1}{A} + \frac{1}{B}}$ ساعت، انجام می‌شود...

! اعداد A و B هر دو می‌توانند بر حسب واحد دیگری از زمان هم گفته شده باشند، مثلاً هر دو به دقیقه بیان شوند!

تست: کار انجام پروژه توسط شیرین در مدت ۸ ساعت انجام می‌شود؛ اما اگر شیدا به او کمک کند می‌تواند پروژه را در ۱ ساعت و ۳۶ دقیقه تمام کنند. اگر پروژه را به شیدا بسپاریم، در چه مدت قادر به انجام آن خواهد بود؟

- (۱) ۲ ساعت
(۲) ۲ ساعت و نیم
(۳) ۲ ساعت و ۱۵ دقیقه
(۴) ۲ ساعت و ۵ دقیقه
- پاسخ:

انجام پروژه توسط شیدا را A دقیقه فرض می‌کنیم:

$$B = 48 \rightarrow \text{به دقیقه تبدیل کن} \rightarrow \text{شیرین ۸ ساعته}$$

شیرین و شیدا با هم ۱ ساعت و ۳۶ دقیقه

$$\xrightarrow{\text{به دقیقه تبدیل کن}} 60 + 36 = 96 \xrightarrow{\text{فرمول}} \frac{AB}{A+B} = 96$$

دو نفر با همدیگر

$$\frac{B=480}{A+480A} \rightarrow \frac{480A}{A+480A} = 96 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین کن}} 480A = 96(A+480) \xrightarrow{\div 96} 5A = A+480 \Rightarrow 4A = 480$$

$$\xrightarrow{\div 4} A = 120 \xrightarrow{\text{به ساعت تبدیل کن}} 2 \text{ ساعت}$$

تست: اگر دو ماشین قدیمی و جدید با هم کار کنند، اتوبانی را در مدت ۲ ساعت آسفالت می‌کنند. با فرض این که یکی از ماشین‌ها سرعتش نصف دیگری است، مدت زمانی که ماشین جدیدتر می‌توانست اتوبان را آسفالت کند، در کدام گزینه آمده است؟

(۲) در ۲ ساعت

(۱) ۱/۵ ساعت

(۴) ۳/۵ ساعت

(۳) ۳ ساعت

پاسخ:

$$\frac{AB}{A+B} = \frac{A=\frac{1}{2}B}{B=2A} \rightarrow \frac{A \times 2A}{A+2A} = 2 \xrightarrow{\text{ساده کن}} \frac{2A^2}{3A} = 2 \Rightarrow 2A^2 = 6A \xrightarrow{\div 2A} A = 3 \text{ ساعت} \xrightarrow{B=2A} B = 6 \text{ ساعت}$$

نسبت طلایی

تعریف: مستطیلی را فرض کنید که نسبت مجموع طول و عرض آن به طولش برابر باشد با نسبت طول به عرض مستطیل، در این صورت مستطیل را طلایی می‌گوییم و نسبت طول به عرض چنین مستطیلی را هم نسبت طلایی می‌نامیم.

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} \text{ اگر طول و عرض مستطیل طلایی را } x \text{ و } y \text{ بگیریم، در این صورت:}$$

عدد طلایی: حالا مستطیلی به طول x و عرض ۱ در نظر بگیرید و نسبت طلایی را در این مستطیل خاص اجرا کنید...

عددی که برای طول مستطیل، به دست می‌آید را عدد طلایی می‌گوییم.

مقدار تقریبی عدد طلایی	مقدار عدد طلایی	معادله‌ای که منجر به عدد طلایی می‌شود	فرم تناسبی منجر به عدد طلایی
۱/۶۱۸	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$	$x^2 - x - 1 = 0$	$\frac{x+1}{x} = x$



در دنباله فیبوناتچی، $\frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ می شود وقتی که: $n \rightarrow +\infty$ ؛ یعنی نسبت هر جمله به قبلی اش، به عدد طلایی نزدیک می شود...

تست: اختلاف دو عدد ۴ بوده و نسبت این دو عدد برابر نسبت طلایی است. عدد بزرگ تر کدام است؟

(۱) $\sqrt{5} + 6$ (۲) $2\sqrt{5} + 6$ (۳) $2\sqrt{5} - 6$ (۴) $2\sqrt{5} + 2$

پاسخ:

فرض کنیم این دو عدد a و b باشند و a هم عدد بزرگ تر!

$$a > b \begin{cases} \text{فرض} \rightarrow a - b = 4 \xrightarrow{\text{a را بر حسب b پیدا کن}} a = b + 4 \\ \text{طلایی} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{cases} \rightarrow \text{به جای a، در رابطه پایین جای گذاری کن}$$

$$\frac{b+4}{b} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \xrightarrow{\text{کسر را تفکیک کن}} 1 + \frac{4}{b} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \xrightarrow{-1} \frac{4}{b} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} \frac{4}{b} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین کن}} 8 = b(\sqrt{5}-1)$$

$$\Rightarrow b = \frac{8}{\sqrt{5}-1} \xrightarrow{\text{گویا کن}} b = \frac{8(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{8(\sqrt{5}+1)}{4} = 2(\sqrt{5}+1)$$

$$\xrightarrow{a=b+4} a = 2(\sqrt{5}+1) + 4 = 2\sqrt{5} + 2 + 4 \Rightarrow a = 2\sqrt{5} + 6$$

معادله های گنگ یا رادیکال دار

تعریف: اگر در معادله ای متغیر x را حداقل یک بار زیر رادیکال ببینیم، معادله را گنگ می گوئیم.

! وجود عددهای رادیکالی، به معنای داشتن معادله ای گنگ نیست!! مثلاً معادله $\sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{2}x - 1 = 0$ ، گنگ

نیست! حتماً باید متغیر معادله، زیر رادیکال باشد، مثل $\sqrt{x+1} = x-1$.



روش حل معادله گنگ

برای حل معادله رادیکال دار، مراحل زیر را به ترتیب اجرا می‌کنیم:

۱- رادیکال شامل مجهول را یک طرف تساوی نگه دارید و مابقی جملات جبری و عددهای بدون رادیکال را ببرید سمت دیگر؛ به این کار می‌گوییم: **تنها کردن رادیکال**.

۲- حالا بسته به این که فرجه رادیکال چند باشد، دو طرف تساوی را به همان توان برسانید تا رادیکال روی مجهول از بین برود.

۳- حالا معادله بدون رادیکال حاصل را ساده و حل کنید.

کنترل نهایی در معادلات گنگ

اگر فرجه رادیکالی که روی عبارت متغیردارتان قرار گرفته فرد باشد که هیچ! یعنی کنترلی نیاز نیست، مثل $\sqrt[3]{3x+2} = x$. اما اگر فرجه رادیکال حاضر در تست، زوج باشد، پس از حل معادله گنگ با روش بالا و پیدا کردن x ها، دو کنترل دارید:

اولش فرض کنید معادله گنگ شما در مرحله تنها کردن رادیکال به صورت $\sqrt{A} = B$ باشد؛ خوب حالا:

الف) x های به دست آمده، نباید A را منفی کنند.

ب) x های به دست آمده نباید B را منفی کنند.

دقت: x ها رو توی عبارت $\sqrt{A} = B$ ، امتحان کنید: نه زیر رادیکال و نه جلوی آن، هیچ کدام نباید منفی شوند،

وگرنه x شما قابل قبول نیست.

تست: جواب معادله $3x = \sqrt{x^2 + 6} - 4$ چگونه است؟

۱ یک جواب منفی

۲ یک جواب مثبت

۳ دو جواب منفی

۴ یک جواب مثبت و یک جواب منفی

پاسخ:

$$3x = \sqrt{x^2 + 6} - 4 \xrightarrow{\text{تنها کردن رادیکال}} \star \xrightarrow{\text{به توان ۲ برسون}} (3x + 4)^2 = x^2 + 6$$



$$\xrightarrow{\text{اتحاد}} 9x^2 + 24x + 16 = x^2 + 6 \xrightarrow{\text{ساده کن}} 8x^2 + 24x + 10 = 0 \xrightarrow{\div 2} 4x^2 + 12x + 5 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حل کن}} \Delta = 64 \rightarrow x = \frac{-12 \pm 8}{8} = -\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{کنترل نهایی}} x = -\frac{5}{2} \xrightarrow{\text{در عبارت جلوی رادیکال}} 3\left(-\frac{5}{2}\right) + 4 = -\frac{15}{2} + 4 = -\frac{7}{2} \text{ غقی}$$

* بذار در

اما $x = -\frac{1}{2}$ ، هم زیر رادیکال و هم جلوی آن را مثبت می‌کند، پس قبوله...

تست: معادله $3x - 2 + \sqrt{4x - 3} = 0$ ، از نظر تعداد جواب کدام وضعیت را دارد؟

- (۱) جواب حقیقی ندارد. (۲) دو جواب مثبت دارد. (۳) یک جواب مثبت دارد. (۴) یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد.

پاسخ:

$$3x - 2 + \sqrt{4x - 3} = 0 \xrightarrow{\text{تنها کردن رادیکال}} \sqrt{4x - 3} = 2 - 3x \xrightarrow{*} 4x - 3 = (2 - 3x)^2$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد}} 4x - 3 = 4x^2 + 9x^2 - 12x \xrightarrow{\text{ساده کردن}} 9x^2 - 16x + 7 = 0 \xrightarrow{\text{حل کردن}} x = 1, \frac{7}{9}$$

جمع ضرایب صفر است

$$\xrightarrow{\text{کنترل نهایی}} \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \text{ بذار } 2 - 3x \rightarrow 2 - 3(1) = -1 \text{ غقی} \\ x = \frac{7}{9} \text{ بذار } 2 - 3x \rightarrow 2 - 3\left(\frac{7}{9}\right) = 2 - \frac{21}{9} = -\frac{3}{9} \text{ غقی} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تعداد جواب}} \text{هیچ}$$

* بذار

معادلات گنگ چندرادیکالی

گاهی بعد از تنها کردن رادیکال و رساندن طرفین به توان، بازهم به معادله‌ای می‌رسید که گنگ است! یعنی دوباره با عبارت جبری زیر رادیکال مواجه می‌شویم، خب مجدداً عبارت رادیکال دار جدید را تنها کنید و باز هم به توان برسائید و معادله را حل کنید...

! حواستان باشد هرچند جا که رادیکال با فرجه زوج داشتید، کنترل نهایی فراموشتان نشود: زیر و جلوی رادیکال، نباید به ازای جواب‌هایی که پیدا کرده‌اید منفی شود...



تست: معادله $\sqrt{2 + \sqrt[3]{3x^2 + 5}} = 2$ ، چند ریشه دارد؟

(۱) دو ریشه قرینه

(۲) یک ریشه مثبت

(۳) یک ریشه منفی

(۴) ریشه ندارد

پاسخ:

$$\sqrt{2 + \sqrt[3]{3x^2 + 5}} = 2 \quad * \xrightarrow{\text{رادیكال فرجه ۲ تنهاست}} 2 + \sqrt[3]{3x^2 + 5} = 4 \xrightarrow{\text{تنها کردن رادیكال}} \sqrt[3]{3x^2 + 5} = 2$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۳ برسون}} 3x^2 + 5 = 8 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm 1 \xrightarrow{\text{کنترل نهایی}} 2 + \sqrt[3]{3(\pm 1)^2 + 5} = 2 + \sqrt[3]{8} = 4 \geq 2$$

* در عبارت زیر رادیكال

رادیكال فرجه فرد هم، که بررسی نداره!

جمع مثبت‌ها، صفر شده!

اگر جمع چند عبارت نامنفی، مساوی صفر شده بود، تک‌تک آن‌ها را مساوی صفر بگذارید و حل کنید و x ای را قبول کنید که در تمام آن‌ها مشترک باشد.

■ معروف‌ترین عبارت‌های نامنفی، قدرمطلق، رادیكال با فرجه زوج و عبارت جبری به توان زوج هستند،

بین: $|2x - 5|$ ، $\sqrt{2x - 6}$ و $(x - 3)^2$...

تست: معادله $4\sqrt{x^2 - 4} + 2\sqrt{x^2 - 3x + 2} = 0$ چند ریشه دارد؟

(۱) دو ریشه با علامت‌های مختلف

(۲) چهار ریشه

(۳) یک ریشه مثبت

(۴) یک ریشه منفی

پاسخ:

$$4\sqrt{x^2 - 4} + 2\sqrt{x^2 - 3x + 2} = 0$$

نامنفی + نامنفی

$$\left\{ \begin{array}{l} 4\sqrt{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ 2\sqrt{x^2 - 3x + 2} = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{حل کن}} x = 1, 2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{مشتکرو بگو}} x = 2$$

تک‌تک عبارت‌های نامنفی رو مساوی صفر قرار بده



■ اگر جمع چند عبارت نامنفی، مساوی صفر شود به طوری که یکی از آن‌ها عددی حقیقی، ثابت و غیر

$$\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x + 2} \boxed{+1} = 0 \quad \text{ببین:} \quad \text{مورد نظر قطعاً جواب ندارد!}$$

عدد ثابت

مسئله‌های منجر به معادله گنگ

گاهی تست به شما مسئله‌ای را با زبان فارسی می‌دهد که در آن قرار است عددی را پیدا کنید. وقتی در صورت مسئله، صحبت از ریشه آن عدد شده باشد، معادله مورد نظر گنگ است. عدد را x فرض کنید و مسئله را به معادله تبدیل کرده و بعد هم حل کنید...

تست: اگر از یک عدد طبیعی، دو برابر جذرش را کم کنیم، نصف آن عدد حاصل می‌شود. این عدد کدام ویژگی را دارد؟

- (۱) اول است. (۲) مربع کامل است. (۳) فرد است. (۴) یک رقمی است.
- پاسخ:

$$x - 2\sqrt{x} = \frac{x}{2} \xrightarrow{\text{تنها کردن رادیکال}} x - \frac{x}{2} = 2\sqrt{x} \xrightarrow{\text{ساده کن مخرج مشترک بگیر}} \frac{2x - x}{2} = 2\sqrt{x} \Rightarrow \frac{x}{2} = 2\sqrt{x}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ برسون}} \frac{x^2}{4} = 4x \xrightarrow{\text{طرفین وسطین کن}} x^2 = 16x \Rightarrow x^2 - 16x = 0 \Rightarrow x(x - 16) = 0 \Rightarrow x = 0, 16 \xrightarrow{x \in \mathbb{N}} x = 16$$

پس گزینه «۲» درست است.

ایستگاه ۲: تعیین علامت عبارت‌های جبری و روش‌های حل نامعادلات

باز هم یکی از چهار عمل اصلی ریاضی تجربی! اینجا تعیین علامت را داریم بخشی که لازمه بسیاری از مباحث دیگر ریاضی شماست! حل نامعادله هم خیلی خیلی کنکوری است. شاید کم‌اهمیت‌ترین بخش اینجا خواص نامساوی‌ها باشد.

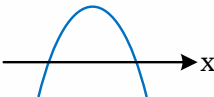
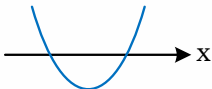
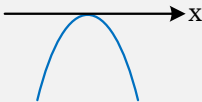
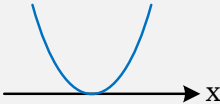
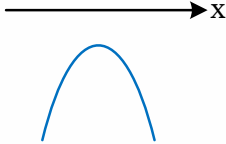
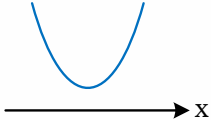


تعیین علامت عبارت‌های درجه اول و دوم

برای تعیین علامت یک عبارت درجه اول با فرم کلی $ax + b$ ، ابتدا باید آن را مساوی صفر بگذاریم و ریشه‌اش را پیدا کنیم، سپس در جدولی که برای تعیین علامت تشکیل می‌دهیم، قبل از ریشه، علامتی مخالف ضریب x و بعد از ریشه هم علامتی دقیقاً موافق علامت ضریب x می‌گذاریم، روی خود ریشه هم عبارت صفر می‌شود.

x	$-\frac{b}{a}$
a	a
$x + b$	مخالفت علامت a
	موافقت علامت a

دقت: تعیین علامت عبارت درجه دوم هم در ابتدا نیازمند این است که عبارت را مساوی صفر بگذارید و ریشه‌هایش را پیدا کنید. بر اساس این که عبارت درجه دوم ما، چند ریشه داشته باشد به صورت زیر تعیین علامت می‌شود:

تغییر نموداری		روش تعیین علامت عبارت							
$a < 0$	$a > 0$	$A = \boxed{a}x^2 + bx + c$							
		۱. بین دو ریشه، مخالف علامت a، ۲. خارج ریشه‌ها، موافق علامت a، ۳. روی خود ریشه‌ها هم صفر می‌شود. <table border="1" data-bbox="860 1330 1303 1447"> <tr> <td>x</td> <td>x_1</td> <td>x_2</td> </tr> <tr> <td>A</td> <td>موافق علامت a</td> <td>مخالفت علامت a</td> </tr> </table>	x	x_1	x_2	A	موافق علامت a	مخالفت علامت a	دو ریشه متمایز به نام‌های x_1, x_2 دارد: $(x_1 < x_2)$
x	x_1	x_2							
A	موافق علامت a	مخالفت علامت a							
		۱. قبل و بعد ریشه، هر دو موافق علامت a، ۲. روی خود ریشه هم صفر می‌شود. <table border="1" data-bbox="895 1639 1259 1758"> <tr> <td>x</td> <td>x_0</td> </tr> <tr> <td>A</td> <td>موافق علامت a</td> </tr> </table>	x	x_0	A	موافق علامت a	یک ریشه مضاعف به نام x_0 دارد:		
x	x_0								
A	موافق علامت a								
		سرتاسر جدول موافق علامت a است و جدول شما مرزی هم برای صفر شدن ندارد. <table border="1" data-bbox="941 1933 1217 2056"> <tr> <td>x</td> <td></td> </tr> <tr> <td>A</td> <td>موافق علامت a</td> </tr> </table>	x		A	موافق علامت a	ریشه حقیقی ندارد:		
x									
A	موافق علامت a								



■ یادتان باشد قدم اول تعیین علامت، مساوی صفر گذاشتن عبارت است: اصلاً تعیین علامت، یعنی اول ریشه پیدا کن...

■ در تعیین علامت عبارت درجه اول، ضریب x و برای درجه دوم هم ضریب x نقش اساسی دارند، پس اگر در عبارت‌های جبری، جمله‌ای که توانش از همه بیشتر است را پرتوان بنامیم، یادتان باشد برای تعیین علامت، فقط ضریب پرتوان لازمه.

بین:

عبارت	$A = (-3)x^2 + 9x - 6$	$A = (-4)x^2 + 4x + 1$	$A = (2)x^2 + x + 1$
Δ	$(\Delta = 9) \Delta > 0$	$\Delta = 0$	$(\Delta = -7) \Delta < 0$
ریشه‌ها	$x_1 = 1, x_2 = 2$	$x_0 = -\frac{1}{2}$ مضاعف	ندارد
تعیین علامت			

تأثیر توان، فرجه و قدرمطلق بر تعیین علامت یک عبارت

شما تعیین علامت عبارت A را بلدید، A می‌تواند یک چند جمله‌ای درجه یک یا درجه دو باشد، خوب حالا دقت کنید:

۱- اگر A دارای توان فرد بوده و یا فرجه فرد داشته باشد، تعیین علامتش هیچ فرقی با تعیین علامت A ندارد.

دقت: برای تعیین علامت فرد A و $\sqrt[n]{A}$ ، کافیه A را تعیین علامت کنی، یعنی فرد رو در تعیین علامت نادیده بگیر...

۲- اگر A ، دارای توان زوج و یا قدرمطلق باشد، نیازی به تعیین علامت A نیست، چون این عبارت همواره مثبت است و فقط روی ریشه‌های A ، در صورت وجود، صفر می‌شود.

دقت: $A^{\text{زوج}}$ و $|A|$ همواره مثبت‌اند یا صفرند یعنی منفی نمی‌شوند.

بین: $x^2 + 2 > 0$, $|3x + 1| \geq 0$.

■ زوج A ، اولاً همواره مثبت است و ثانیاً جاهایی تعریف شده است که A منفی نباشد!

تست: در بازه (a, b) عبارت $(12 - 4x)^3$ مثبت و عبارت $\sqrt[5]{1-x}$ منفی هستند. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ:

۱ $(12 - 4x)^3$ توان ۳ رو نادیده بگیر $\rightarrow 12 - 4x$ ریشه حساب کن $\rightarrow 12 - 4x = 0 \Rightarrow x = 3$ تعیین علامت $\rightarrow$ مثبت است $\rightarrow x < 3$

۱۲x - 4 + -

۲ $\sqrt[5]{1-x}$ فرجه ۵ رو نادیده بگیر $\rightarrow 1 - x$ ریشه حساب کن $\rightarrow 1 - x = 0$ تعیین علامت $\rightarrow$ منفی است $\rightarrow x > 1$

1 - x + -

بین شرطهای ۱ و ۲ اشتراک بگیر $\rightarrow 1 < x < 3$

پس در بازه $(1, 3)$ ، اتفاق مورد نظر تست می افتد: $a = 1, b = 3 \Rightarrow b - a = 2$

انواع ریشه

در عبارت $(x - a)^{2k}$ ، ریشه عبارت، یعنی $x = a$ را ریشه مکرر مرتبه زوج و در عبارت $(x - b)^{2k+1}$ ، ریشه عبارت، یعنی $x = b$ را ریشه مکرر فرد می گوئیم! در حالت $(x - a)^2$ ریشه را مضاعف می گفتیم!!

تعیین علامت در حالت کلی

برای تعیین علامت هر عبارتی یادتان باشد:

۱- ما فقط تعیین علامت عبارت های درجه یک و دو را بلدیم که به آن ها عبارت آشنا می گوئیم.

۲- هر عبارت دیگری که دادند (از درجه بالاتر)، حتماً با فاکتورگیری یا تجزیه تبدیلش می کنیم به ضرب چند عبارت آشنا.

۳- تعیین علامت عبارتی که به صورت ضرب یا تقسیم چند عبارت آشنا است، کاری ندارد! این طوری که هر کدام را در یک سطر، تعیین علامت کرده، سپس در انتها علامت های هر ستون را در هم ضرب می کنیم...



! فقط یادتان باشد جدول تعیین علامت شما، روی ریشه‌های مخرج باید علامت تعریف نشده داشته باشد و روی ریشه‌های صورت، صفر شود...

■ در تعیین علامت عبارت‌هایی که به صورت ضرب و تقسیم چند عبارت آشنا هستند، توجه کنید که از

عبارت‌های زوج $(x-a)$ ، هر جا که بودند، صرف نظر کنید، چون این‌ها همواره مثبت‌اند. فقط اگر در صورت باشند، ریشه‌شان عبارت را صفر می‌کند و چنانچه در مخرج باشند، ریشه‌شان عبارت را تعریف نشده...

تست: عبارت $\frac{x^3 - 4x^2}{-x^2 + 3x - 2}$ در کدام بازه منفی است؟

(۱) (۱, ۲) (۲) $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ (۳) (۳, ۵) (۴) (۴, ۵)

پاسخ:

$$\frac{x^3 - 4x^2}{-x^2 + 3x - 2} \xrightarrow[\text{مخرج رو پیدا کن}]{\text{ریشه‌های صورت و}} \left\{ \begin{array}{l} x^3 - 4x^2 = 0 \xrightarrow{\text{فاکتور بگیر}} x^2(x-4) \xrightarrow[\text{نامنفی است}]{x^2 \text{ همواره}} x-4=0 \Rightarrow x=4 \\ -x^2 + 3x - 2 = 0 \xrightarrow[\text{جمع ضرایب صفره}]{\text{ریشه حساب کن}} x=1, 2 \end{array} \right.$$

	x	1	2	4	
	x-4	-	-	-	+
	-x^2-3x-2	-	+	-	-
تعیین علامت		+	-	+	-
		تعریف نشده	تعریف نشده		

پس عبارت ما در (۱, ۲) و $(4, +\infty)$ همواره منفی است.

تعیین علامت سریع؛ روش پرتوان

در این روش، خیلی سریع و در یک سطر، عبارت داده شده را تعیین علامت می‌کنیم! برای این منظور مراحل زیر را اجرا کنید:

- ۱- تمامی ریشه‌های عبارت‌های آشنا را پیدا کنید و آن‌ها را به ترتیب از کوچک به بزرگ در جدول قرار دهید.
- ۲- در عبارتی که قرار است تعیین علامت کنید، عبارت‌های مثبت (مثل قدرمطلق‌ها عبارت‌های رادیکالی فرجه زوج و بسته‌های به توان زوج) را کنار گذاشته و در بقیه عبارت‌ها فقط علامت ضریب پرتوان را در نظر بگیرید، حالا تمامی این علامت‌ها را در هم ضرب کنید تا بشود یک علامت مثبت یا منفی!



۳- خب اولین خانه سمت راست جدول شما، موافق علامت ضرب پرتوان هاست، حالا به عقب برگردید و علامت‌ها را یک در میان عوض کنید، یعنی از + به - و از - به + همین‌طوری بیاید عقب! فقط اگر به ریشه مضاعف و قدرمطلق رسیدید، علامت عوض نمی‌شود! **بین:**

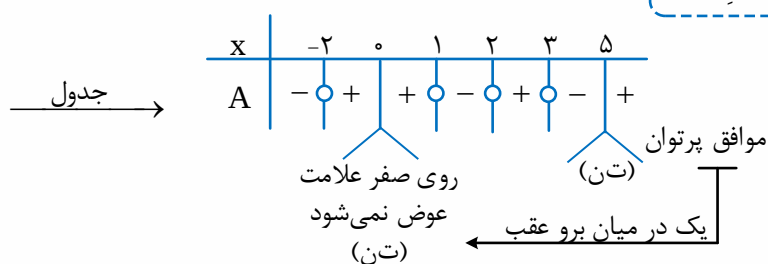
$$A = \frac{(-x^2 + 4x - 3)(x^2 - 4)}{x^2(5 - x)} \xrightarrow{\text{ریشه‌ها رو پیدا کن}} A = \frac{(-x^2 + 4x - 3)(x^2 - 4)}{x^2(5 - x)} \xrightarrow{\text{پرتوان بدون } x^2} \frac{(-)(+)}{(-)} = +$$

(۱, ۳)

(۲, -۲)

مضاعف صفر

۵





خواص نامساوی‌ها

به دو طرف یک نامساوی، می‌توانید عدد ثابت دلخواهی را اضافه یا از دو طرف کم کنید. نتیجه: اگر عددی را از یک سمت نامساوی به طرف دیگر منتقل کنید، علامت آن عدد عوض می‌شود، درست مثل تساوی: $a < b + c \Rightarrow a - c < b$	۱- $a < b \Rightarrow a + c < b + c$	جمع و منها کردن
	۲- $a < b \Rightarrow a - d < b - d$	
در دو طرف نامساوی می‌توانید عدد ثابت و دلخواه c را ضرب کنید؛ فقط اگر c منفی باشد، جهت نامساوی را عوض می‌کند...	۳- $a < b \xrightarrow{c > 0} ac < bc$	ضرب کردن
	۴- $a < b \xrightarrow{c < 0} ac > bc$	
در دو طرف یک نامساوی را می‌توانید بر عدد غیر صفر و ثابت d تقسیم کنید؛ فقط اگر d منفی باشد، جهت نامساوی عوض می‌شود.	۵- $a < b \xrightarrow{d > 0} \frac{a}{d} < \frac{b}{d}$	تقسیم کردن
	۶- $a < b \xrightarrow{d < 0} \frac{a}{d} > \frac{b}{d}$	
از دو طرف یک نامساوی بدون هیچ مشکلی می‌توانید فرجه فرد گرفته و یا هر دو طرف را به یک توان فرد برسانید.	۷- $a < b \Rightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$	توان و فرجه فرد
	۸- $a < b \Rightarrow \sqrt[2n+1]{a} < \sqrt[2n+1]{b}$	
در دو طرف یک نامساوی را می‌توانید به توان زوج برسانید، فقط اگر هر دو عدد حاضر در نامساوی منفی بودند، باید جهت نامساوی را عوض کنید... اگر از دو طرف نامساوی، فرجه زوج گرفتید، برای اعداد حاصل، قدر مطلق بگذارید...	۹- $0 < a < b \Rightarrow a^{2n} < b^{2n}$	توان و فرجه زوج
	۱۰- $a < b < 0 \Rightarrow a^{2n} > b^{2n}$	
از طرفین یک نامساوی که دو عدد حاضر در آن مثبت هستند، بدون مشکل، می‌توانید فرجه زوج بگیرید.	۱۱- $a^{2n} < b^{2n} \Rightarrow a < b $	
	۱۲- $0 < a < b \Rightarrow \sqrt[2n]{a} < \sqrt[2n]{b}$	
معکوس کردن طرفین یک نامساوی، اشکالی ندارد! اما جهت نامساوی همیشه عوض می‌شود، مگر این‌که دو عدد حاضر در نامساوی، مختلف‌العلامت باشند. واضح‌ه که: $a, b \neq 0$	۱۳- $0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$	معکوس کردن
	۱۴- $a < b < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$	
	۱۵- $a < 0 < b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$	

! وقتی عبارت‌های حاضر در یک نامساوی، پارامتری هستند و خبری از علامت آن‌ها ندارید، اصلاً حق ندارید عملیات نامساوی‌ها را انجام دهید...

تست: اگر $\sqrt{a} < b^{-\frac{1}{2}}$ باشد، کدام گزینه زیر درست است؟

(۴) $ab > 1$

(۳) $ab < 1$

(۲) $a < b$

(۱) $a > b$

پاسخ:

$$\sqrt{a} < b^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{توان منفی رو بذار مخرج}} \sqrt{a} < \frac{1}{b^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{\text{توان کسری رو رادیکال کن}} \sqrt{a} < \frac{1}{\sqrt{b}}$$

$$\xrightarrow[\sqrt{b} > 0]{\times \sqrt{b}} \sqrt{a} \sqrt{b} < 1 \xrightarrow[\text{دو طرف مثبت اند}]{\text{توان ۲ برسوزن}} ab < 1$$

! اگر در یک نامساوی، یکی از اعداد حاضر، مثبت و دیگری منفی باشد، رساندن دو طرف به توان زوج، اصلاً کار درستی نیست!

نامعادله درجه اول

تعریف: یک عبارت مجهول دار با علامت نامساوی، نامعادله نامیده می‌شود. اگر بزرگ‌ترین توان مجهول، ۱ باشد، می‌شود نامعادله درجه اول؛ مثل: $4x - 5 < 7$. حالا نامساوی وسط، می‌تواند مساوی هم داشته باشد، مثل: $9x - 5 \geq 0$.

برای حل نامعادله درجه اول، تمام اعداد ثابت را به سمت راست و تمام مجهول‌دارها را به سمت چپ منتقل کنید و ساده‌اش هم بکنید، حالا کافیه دو طرف را بر ضریب مجهول تقسیم کنید؛ حواستان هست که اگر ضریب مجهول، منفی بود جهت را هم عوض کنید و گرنه که هیچ!



تست: مجموعه جواب نامعادله $\frac{2}{3}(x+7) - \frac{x}{4} > \frac{1}{2}(2-x)$ کدام است؟

- (۱) $x > -\frac{5}{2}$ (۲) $x > -2$ (۳) $x > -4$ (۴) $x > -3$

پاسخ:

$$\frac{2}{3}(x+7) - \frac{x}{4} > \frac{1}{2}(2-x) \xrightarrow{\times 12} 8(x+7) - 3x > 6(2-x) \xrightarrow{\text{ضرب کن}} 8x + 56 - 3x > 12 - 6x$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب کن}} 8x - 3x + 6x > 12 - 56 \Rightarrow 11x > -44 \xrightarrow{\div 11} x > -4$$

■ در نامعادلات درجه اولی که از دو طرف محدود هستند، مثل $c < ax + b < d$ ، باید از سه طرف، عدد b را کم کرده و سپس هر سه را بر a تقسیم می‌کنیم، حواسمان به علامت ضریب x هم هست...

تست: اگر $13 \leq 5x - 2 < 7$ باشد، چند جواب صحیح برای x وجود دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

پاسخ:

$$-7 < 5x - 2 \leq 13 \xrightarrow{+2} -5 < 5x \leq 15 \xrightarrow{\div 5} -1 < x \leq 3 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x \in \{0, 1, 2, 3\} \xrightarrow{\text{تعداد}} 4 \text{ تا}$$

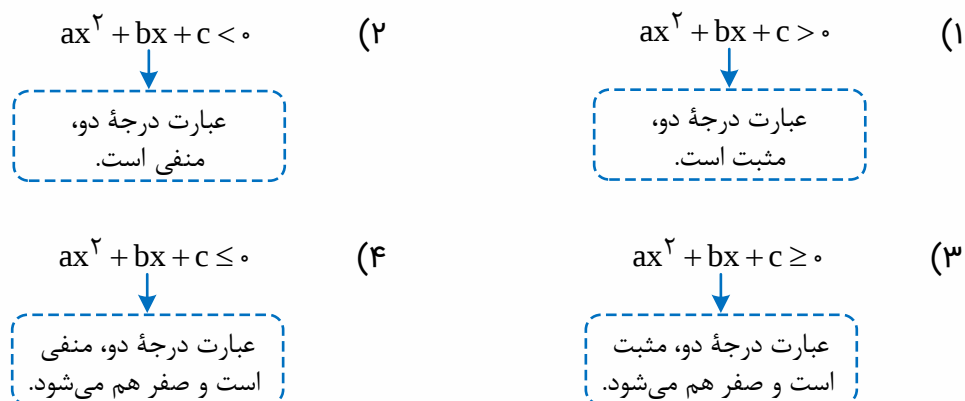
نامعادله درجه دوم

تعریف: اگر یک عبارت درجه دوم با مجهول x ، بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از عددی معلوم داده شده باشد و هدف از حل آن، پیدا کردن محدوده‌ای برای x باشد که نامساوی برقرار شود، با یک نامعادله درجه دو مواجه‌ایم...

■ قدم اول، در حل نامعادله درجه دوم، این است که تمام جملات را به یک سمت نامساوی منتقل کنید تا یک طرف، عدد صفر باشد...



دقت: فرم کلی نامعادله‌های درجه دوم، یکی از چهار صورت زیر است:



روش حل: وقتی یک سمت نامعادله، صفر است، حالا عبارت درجه دوم آن طرف را تعیین علامت کنید و براساس علامت قابل قبول عبارت، محدوده مناسب را به عنوان جواب اعلام کنید...

تست: مقادیر عبارت $-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$ در بازه (a, b) ، از $\frac{7}{2}$ بزرگ‌تر است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

(۱) ۵/۵ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۶

پاسخ:

$$\begin{aligned}
 &-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 > \frac{7}{2} \xrightarrow{\text{همه رو بیار سمت چپ}} -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 - \frac{7}{2} > 0 \xrightarrow{\text{ساده کن}} -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2} > 0 \\
 &\quad \text{عبارت درجه دو، مثبت است.} \\
 &\xrightarrow{\times 2} -x^2 + 4x + 5 > 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها را پیدا کن}} x = -1, 5 \xrightarrow{\text{تعیین علامت کن}} \begin{array}{c|ccc} x & & -1 & & 5 & \\ \hline \text{عبارت} & - & + & - & \end{array} \\
 &\xrightarrow{\text{عبارت، + بود}} -1 < x < 5 \Rightarrow x \in (-1, 5) \Rightarrow (a, b) = (-1, 5) \Rightarrow b - a = 5 - (-1) = 6
 \end{aligned}$$

حل نامعادله در حالت کلی

حالا فرض کنید یک نامعادله دارید که عبارت موجود در آن به صورت یک عبارت جبری باشد. برای حل نامعادله‌ها در حالت کلی، مراحل زیر را اجرا کنید:

۱- تمامی جمله‌ها را به سمت چپ منتقل کنید تا سمت راست نامعادله، عدد صفر باشد و عبارت حاصل را ساده کنید.

۲- حالا عبارت سمت چپ که به صورت ضرب و تقسیمی از چند عبارت آشناست (!) را تعیین علامت کنید.



۳- بسته به این که عبارت شما از صفر کوچکتر یا بزرگتر بوده، در جدول تعیین علامت، ناحیه‌های قابل قبول را پیدا کرده و محدوده x آن را بنویسید.

❑ اصلاً یادتان باشد «حل نامعادله، شما را یاد تعیین علامت بندازه...»

تست: هرگاه $\frac{x^3 + x - 6}{x^2 + x - 6} < 1$ باشد، چند جواب طبیعی برای x وجود دارد؟

(۱) هیچ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی‌شمار

پاسخ:

$$\frac{x^3 + x - 6}{x^2 + x - 6} < 1 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک بگیر}} \frac{x^3 + x - 6 - (x^2 + x - 6)}{x^2 + x - 6} < 0 \xrightarrow{\text{۱ رو بیار سمت چپ}} \frac{x^3 - x^2}{x^2 + x - 6} < 0$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 6} < 0 \xrightarrow{\text{فاکتور بگیر}} \frac{x^2(x-1)}{x^2 + x - 6} < 0 \xrightarrow{\text{اعلام ریشه‌ها}} \frac{x^2(x-1)}{x^2 + x - 6} < 0$$

ریشه مضاعف ۱
ریشه ۲، -۳

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت کن}} \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & -3 & 0 & 1 & 2 & x \\ \hline & - & + & - & + & \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{عبارت منفی بود}} x < -3 \text{ یا } 1 < x < 2 \xrightarrow{x \in \mathbb{N}} \text{ جوابی ندارد}$$

تعریف نشده تعریف نشده

❑ اگر نامعادله داده شده در تست، علامت مساوی هم داشت، علاوه بر محدوده‌ای که پیدا کرده‌اید، ریشه‌های صورت هم قبول‌اند...

تست: فرض کنید $\frac{x+16}{2x-4} \leq -1$ ، در این صورت چند جواب صحیح برای x وجود دارد؟

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

پاسخ:

$$\frac{x+16}{2x-4} \leq -1 \xrightarrow{\text{همه رو بیار سمت چپ}} \frac{x+16}{2x-4} + 1 \leq 0 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک بگیر}} \frac{x+16+2x-4}{2x-4} \leq 0$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\text{ساده کن}} \frac{3x+12}{2x-4} \leq 0 \xrightarrow{\text{ریشه صورت و مخرج}} -4, 2 \xrightarrow{\text{تعیین علامت پرتوان + است}} \begin{array}{c} | \quad -4 \quad 2 \\ + \quad \circ \quad - \quad + \end{array} \\ & \xrightarrow{\text{ناحیه منفی و ریشه صورت}} -4 \leq x < 2 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1\} \xrightarrow{\text{تعداد}} 6 \text{ تا } 6 \end{aligned}$$

تعریف نشده

۱- وقتی تست به شما می‌گوید «نمودار f بالای نمودار تابع g قرار دارد» شما قرار دهید $f(x) > g(x)$ و بعدش هم نامعادله حاصل را حل کنید.

۲- «نمودار f بالای نمودار تابع g قرار ندارد» هم می‌شود $f(x) \leq g(x)$ و بعد هم حل نامعادله...

تست: نمودار تابع $f(x) = x^2 + x$ ، در بازه (a, b) ، زیر نمودار تابع $g(x) = 4x + 4$ است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)
- پاسخ:

$$f(x) = x^2 + x, g(x) = 4x + 4 \xrightarrow{f \text{ زیر } g \text{ است}} \frac{f(x) < g(x)}{f(x) < g(x)} \rightarrow x^2 + x < 4x + 4$$

$$\xrightarrow{\text{همه رو بیار سمت چپ}} x^2 + x - 4x - 4 < 0 \xrightarrow{\text{ساده کن}} x^2 - 3x - 4 < 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} -1, 4$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{array}{c} | \quad -1 \quad 4 \\ + \quad \circ \quad - \quad + \end{array} \xrightarrow{\text{عبارت منفی است}} -1 < x < 4 \xrightarrow{\text{بازه}} (-1, 4) \xrightarrow{\text{منها کن}} b - a = 4 - (-1) = 5$$

نامعادله نهفته در دل تست

غیر از تست‌هایی که در ظاهر تست، قرار است نامعادله‌ای را حل کنید، دسته دیگری از تست‌ها نیز هستند که وقتی شرط خواسته شده در سؤال را نوشته و اجرا می‌کنید، تازه می‌رسید به یک نامعادله! که خب باید آن را حل کنید و برسید به جواب نهایی...



تست: به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله درجه دوم $\frac{1}{2}m + 2 = 0$ ، فاقد ریشه حقیقی

است؟

- (۱) $-3 < m < 5$ (۲) $-3 < m < 4$ (۳) $-2 < m < 4$ (۴) $-1 < m < 5$

پاسخ:

$$\frac{1}{2}m + 2 = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac} \Delta = (m+1)^2 - 4\left(\frac{1}{2}m + 2\right)$$

ریشه‌ها رو پیدا کن $\rightarrow m = 5, -3$ $\xrightarrow{\Delta < 0}$ ریشه ندارد $\rightarrow \Delta = m^2 - 2m - 15$ اتحاد رو باز و ساده کن

رسیدیم به یک نامعادله $\xrightarrow{\Delta < 0} -3 < m < 5$ تعیین علامت

تست: تمامی نقاط نمودار تابع $y = (m-3)x^2 + (m+2)x + 2m+1$ هیچ‌گاه زیر محور x ها واقع نمی‌شوند.

محدوده تغییرات m کدام است؟

- (۱) $m \geq 4$ (۲) $m \geq \frac{9}{2}$ (۳) $m \geq \frac{17}{4}$ (۴) $m > 3$

پاسخ:

تابع، زیر محور x ها نیست، یعنی همواره بالای محور x ها و یا مماس بر آن است و این هم یعنی $\Delta \leq 0$ و $a > 0$ ؛ اما اجرای شرطها:

۱ $\Delta = (m+2)^2 - 4(m-3)(2m+1) \xrightarrow{\Delta \leq 0} -7m^2 + 24m + 16 \leq 0$ اتحاد رو باز و ساده کن رسیدیم به یک نامعادله

ریشه‌ها رو پیدا کن $\rightarrow m = -\frac{4}{7}, 4$ تعیین علامت $\xrightarrow{\Delta \leq 0} m \leq -\frac{4}{7}$ یا $m \geq 4$

۲ $a > 0 \Rightarrow m-3 > 0 \rightarrow m > 3$ اشتراک بگیر با شرط ۱ $\rightarrow m \geq 4$ $m \leq -\frac{4}{7}$ یا $m \geq 4$

حل نامعادله با روش هندسی

در این روش حل نامعادله، بازهم ابتدا تمامی جملات را می‌آوریم سمت چپ نامساوی، بعد می‌رسیم به عبارتی مثل $f(x) > 0$ یا $f(x) < 0$ ، که خب نامساوی‌ها می‌توانند مساوی هم داشته باشند! منظور ما از $f(x)$ این‌جا، عبارتی بر حسب x است. حالا کافیه تابع $f(x)$ را رسم کنیم و قسمت قابل قبول آن را انتخاب کرده و ناحیه x این محدوده را اعلام کنیم.

! $f(x) > 0$ ، یعنی قسمت بالای محور x ‌ها، قبوله و $f(x) < 0$ هم، به معنای قابل قبول بودن قسمت زیر محور x ‌هاست!

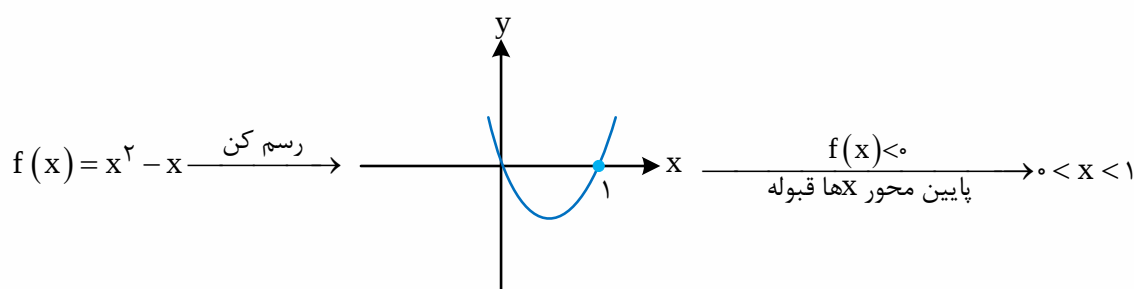
این روش برای تعیین علامت عباراتی مناسب است که رسم تابع به صورت خیلی سریع ممکن باشد، مثل تابع درجه دوم خاص...

تست: هرگاه $\frac{x^2 - x}{x^2 + x + 1} < 0$ باشد، محدوده قابل قبول برای x کدام است؟

- (۱) $-1 < x < 1$ (۲) $x > 1$ (۳) $-1 < x < \frac{1}{2}$ (۴) $0 < x < 1$

پاسخ:

عبارت مخرج، ریشه ندارد: $\Delta = (1)^2 - 4(1)(1) = -3$ $\xrightarrow{\Delta \text{ حساب کن}}$ $x^2 + x + 1$ پس همواره موافق علامت a ی خود است، یعنی مخرج همواره مثبت است و ربطی به x ندارد، پس تست انگار می‌گوید: $x^2 - x < 0$.



نامعادله‌های قدرمطلق‌دار

اگر u ، عبارتی بر حسب x بوده و a هم، عددی مثبت باشد، در این صورت:

نامعادله	حل نامعادله
۱ $ u \leq a$	$-a \leq u \leq a$
۲ $ u \geq a$	$u \geq a$ یا $u \leq -a$

دو نامساوی حاصل را جداگانه حل کنید و نتیجه‌ها را با هم اجتماع کنید.



اگر نامعادله اصلی داده شده، مساوی نداشت، ما هم در حل نامعادله و روی دو تا نامساوی ها، مساوی

نمی گذاریم. **بین:** $|x-1| < 5 \xrightarrow{\text{حل نامعادله}} -5 < x-1 < 5 \xrightarrow{+1} -4 < x < 6$

■ اگر a مثبت نباشد، نامعادلات قدرمطلق بالا، این طوری خواهند شد:

۱- $|u| \leq 0$ ، فقط زمانی جواب دارد که $u = 0$ باشد.

۲- معادله $|u| \leq$ عدد منفی، هیچ گاه جواب ندارد.

۳- معادله $|u| \geq$ عدد منفی یا صفر، هم جوابش می شود $\mathbb{R}$ ، که یعنی همیشه درسته، مگر این که u

محدودیتی داشته باشد!

تست: هرگاه $|x^2 - 5x + 5| \leq 1$ باشد، چند جواب طبیعی برای x وجود دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ:

$|x^2 - 5x + 5| \leq 1 \xrightarrow{\text{حل نامعادله}} -1 \leq x^2 - 5x + 5 \leq 1 \xrightarrow{\text{دو قسمت مجزا کن}}$

۱ $x^2 - 5x + 5 \leq 1 \xrightarrow{\text{رو ۱}} x^2 - 5x + 4 \leq 0 \xrightarrow{\text{بیار سمت چپ}} \xrightarrow{\text{ریشه ها}} x = 1, 4 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{array}{c|ccc} x & & 1 & 4 & \\ \hline & + & - & + & \end{array} \xrightarrow{\text{منفی و صفر بود}} 1 \leq x \leq 4$

۲ $-1 \leq x^2 - 5x + 5 \xrightarrow{\text{رو -1}} x^2 - 5x + 6 \geq 0 \xrightarrow{\text{بیار سمت راست}} \xrightarrow{\text{ریشه ها}} x = 2, 3 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{array}{c|ccc} x & & 2 & 3 & \\ \hline & + & - & + & \end{array} \xrightarrow{\text{مثبت و صفر بود}} x \leq 2 \text{ یا } x \geq 3$

اشتراک بین ۱ و ۲ بگیر $\xrightarrow{\text{تعداد}} x \in \mathbb{N} \rightarrow x = 1, 2, 3, 4 \rightarrow 4$

تست: مجموعه جواب نامعادله $|x-3| > x^2 + 1$ را به صورت (a, b) نمایش داده‌ایم. بزرگ‌ترین مقدار $b-a$

کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ:

می‌بینید که $x^2 + 1$ ، یک عبارت همواره مثبت است! پس:

$$|x-3| > x^2 + 1 \xrightarrow{\text{حل نامعادله}} x-3 > x^2 + 1 \quad x-3 < -(x^2 + 1) \xrightarrow{\text{هر کدام را جداگانه، حل کن}}$$

$$1 \quad x-3 > x^2 + 1 \xrightarrow{\text{همه رو به یک سمت راست}} x^2 - x + 4 < 0 \xrightarrow{\text{ریشه ها}} \Delta < 0 \xrightarrow{\text{ندارد}} \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \text{همواره مثبت است} \xrightarrow{\text{ما منفی دوست داشتیم}} \text{موافق علامت } a$$

$$2 \quad x-3 < -(x^2 + 1) \xrightarrow{\text{همه رو به یک سمت چپ}} x^2 + x - 2 < 0 \xrightarrow{\text{ریشه ها}} 1, -2 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{array}{c} x \\ | \\ + \quad - \quad + \end{array} \xrightarrow{\text{منفی بود}} -2 < x < 1$$

جواب نهایی، اجتماع $\emptyset$ با $(-2, 1)$ است، که می‌شود $(-2, 1)$ و در نهایت:

$$a=2, b=1 \Rightarrow b-a=1-(-2)=3$$

نامساوی‌های دوگانه را قدرمطلق کنیم...

نامساوی‌های دوطرفه یا دوگانه‌ای مثل $a < x < b$ و همچنین $x > a$ یا $x < b$ را می‌توان به شکل یک نامساوی قدرمطلق‌دار نوشت. برای رسیدن به این منظور، میانگین a و b را از طرفین نامساوی‌ها کم کنید...

الف)

$$-2 < x < 4 \xrightarrow{\frac{4+(-2)}{2}=1} -2-1 < x-1 < 4-1 \xrightarrow{\text{ساده کن}} -3 < x-1 < 3 \xrightarrow{\text{قدرمطلق کن}} |x-1| < 3$$

ب)

$$x > 3 \text{ یا } x < -5 \xrightarrow{\frac{3+(-5)}{2}=-1} x-(-1) > 3-(-1) \text{ یا } x-(-1) < -5-(-1)$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} |x+1| > 4$$



! برای قدرمطلق کردن یک نامعادله، ابتدا باید آن را حل کنید تا محدوده x به صورت یک محدوده دوگانه به دست آید.

این جوری هم ببین:

نامعادله دوگانه	شکل قدرمطلق نامعادله
۱ $a \leq x \leq b$	$\left x - \frac{a+b}{2} \right \leq \frac{b-a}{2}$
۲ $x \leq a$ یا $x \geq b$	$\left x - \frac{a+b}{2} \right \geq \frac{b-a}{2}$

! باز هم اگر نامساوی‌های داده شده، مساوی نداشتند، در شکل قدرمطلق، مساوی نگذارید.

تست: شکل قدرمطلق نامعادله $5 < \frac{7-2x}{3} < -3$ کدام است؟

(۱) $|x+2| < 6$ (۲) $|x-2| < 6$ (۳) $|x| < 6$ (۴) $|x-2| > 6$

پاسخ:

$$\begin{aligned}
 -3 < \frac{7-2x}{3} < 5 &\xrightarrow{\times 3} -9 < 7-2x < 15 \xrightarrow{-7} -16 < -2x < 8 \xrightarrow{\div (-2)} 8 > x > -4 \\
 &\xrightarrow{\text{مرتبه بنویس}} -4 < x < 8 \xrightarrow{a=-4, b=8} \begin{cases} \frac{a+b}{2} = \frac{-4+8}{2} = 2 \\ \frac{b-a}{2} = \frac{8-(-4)}{2} = 6 \end{cases} \xrightarrow{\text{شکل قدرمطلق}} |x-2| < 6
 \end{aligned}$$