



درس اول: هندسه تحلیلی

خط

تعریف شیب خط: شیب یک خط برابر است با نسبت جابه‌جایی عمودی به جابه‌جایی افقی. شیب خطی که از نقاط $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ می‌گذرد عبارت است از:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

معادله خط

معادله خطی که شیب آن m بوده و از نقطه‌ای مثل $A(x_1, y_1)$ می‌گذرد عبارت است از:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که از $A(0, -1)$ و $B(4, 2)$ عبور کند.

حل:

$$(A(\underset{x_1}{0}, \underset{y_1}{-1}), B(\underset{x_2}{4}, \underset{y_2}{2})) \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - (-1)}{4 - 0} = \frac{3}{4}$$

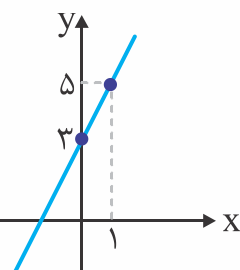
$$y - y_1 = m \Rightarrow m(x - x_1) \Rightarrow y - (-1) = \frac{3}{4}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{3}{4}x - 1$$

رسم نمودار خط

برای رسم نمودار یک خط بهتر است ابتدا معادله خط را به شکل استاندارد یعنی $y = mx + n$ تبدیل کنیم، سپس به x دو عدد دلخواه ولی مناسب نسبت دهیم و y این دو x را به دست آوریم. حال دو نقطه به دست آمده را به هم وصل کرده و امتداد می‌دهیم. ضمناً m و n عرض از مبدأ خط می‌باشد (عرض از مبدأ، محل برخورد نمودار با محور y ها می‌باشد).

مثال: نمودار خط $2y - 4x = 6$ از کدام ناحیه محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

حل:



$$2y = 4x + 6 \xrightarrow{\div 2} y = 2x + 3$$

نمودار از ناحیه چهارم نمی‌گذرد. $\Rightarrow$





خطوط موازی و عمود

اگر دو خط با هم موازی باشند، شیب‌های مساوی دارند، ولی اگر عمود باشند، شیب یکی از آن‌ها، عکس و قرینه دیگری است یعنی حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها (-1) است:

$$m \times m' = -1$$

تذکر: خطوط به معادله $x = a$ و $y = b$ همواره بر هم عمودند. $(a, b \in \mathbb{R})$ مثلاً دو خط $x = -1$ و $y = \sqrt{2}$ بر هم عمودند.

مثال: مقدار k را طوری به دست آورید که دو خط $2y + 1 = x$ و $(k-1)y = 3x - 2$ بر هم عمود باشند.

حل:

$$2y = x - 1 \xrightarrow{\div 2} y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$(k-1)y = 3x - 2 \xrightarrow{\div (k-1)} y = \frac{3}{k-1}x - \frac{2}{k-1}$$

$$\Rightarrow m' = \frac{3}{k-1}, \quad m \times m' = -1 \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{3}{k-1} = -1 \Rightarrow \frac{3}{2k-2} = -1$$

$$\Rightarrow -2k + 2 = 3 \Rightarrow -2k = 1 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

مثال: عرض از مبدأ خطی که از نقطه $A(3, 4)$ گذشته و با خط $x - y = 4$ موازی باشد را به دست آورید.

حل:

$$\text{خط } x - y = 4 \Rightarrow -y = -x + 4 \xrightarrow{\div (-1)} y = x - 4 \Rightarrow m = 1$$

مطلوب ما باید با خط داده شده موازی باشد، پس شیب آن ۱ است؛ لذا:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 4 = 1 \times (x - 3) \Rightarrow y = x + 1$$

$$\Rightarrow \text{عرض از مبدأ} = 1$$





نقطه در دستگاه مختصات

فاصله بین دو نقطه

$$AB = |x_A - x_B|$$

اگر دو نقطه A و B هم‌عرض باشند، آن‌گاه:

$$CD = |y_C - y_D|$$

اگر دو نقطه C و D هم‌طول باشند، آن‌گاه:

مثال: الف) فاصله نقاط $A(5, 4)$ و $B(-6, 4)$ را به دست آورید.

ب) فاصله نقاط $C(3, 9)$ و $D(3, -5)$ را به دست آورید.

حل: الف) A و B هم‌عرض هستند، لذا:

$$AB = |x_A - x_B| = |5 - (-6)| = 11$$

ب) C و D هم‌طول هستند، لذا:

$$CD = |y_C - y_D| = |9 - (-5)| = 14$$

در حالت کلی اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه از صفحه مختصات باشند فاصله آن‌ها از یکدیگر (طول پاره‌خط AB) برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

مختصات وسط پاره‌خط

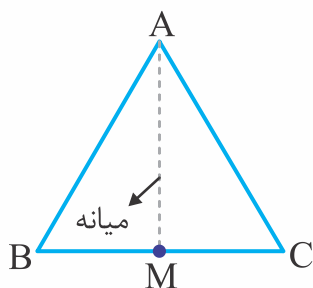
اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ مختصات دو سر پاره‌خطی باشند، مختصات نقطه M وسط AB عبارت است از:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

تذکر: نقاط A و B نسبت به نقطه M (وسط A و B) قرینه هستند.

مثال: اگر $A(1, 2)$ ، $B(-4, 4)$ و $C(0, -8)$ سه رأس مثلثی باشند، اندازه میانه AM را به دست آورید. (M وسط BC است.)

حل: M وسط BC است، لذا: (شکل فرضی است.)



$$\begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-4 + 0}{2} = -2 \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{4 + (-8)}{2} = -2 \end{cases} \quad A \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}, \quad M \begin{vmatrix} -2 \\ -2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$= \sqrt{(1 + 2)^2 + (2 + 2)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$





مثال: قرینه نقطه $A(3, -2)$ را نسبت به $M(0, 4)$ به دست آورید.

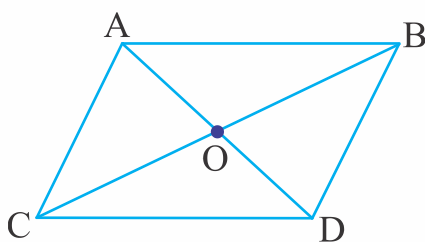
حل: اگر قرینه نقطه A نسبت به M را B بنامیم، M در واقع، نقطه وسط پاره خط AB است لذا خواهیم نوشت:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 0 = \frac{3 + x_B}{2} \Rightarrow 3 + x_B = 0 \Rightarrow x_B = -3$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow 4 = \frac{-2 + y_B}{2} \Rightarrow -2 + y_B = 8$$

$$\Rightarrow y_B = 10 \Rightarrow B(-3, 10)$$

یک خاصیت مهم از متوازی الاضلاع:



در هر متوازی الاضلاع، مانند شکل مقابل، بین مختصات ۴ رأس، روابط زیر برقرار است (مربع، مستطیل و لوزی هم نوعی متوازی الاضلاع هستند).

$$\begin{cases} x_A + x_D = x_B + x_C \\ y_A + y_D = y_B + y_C \end{cases}$$

اثبات: می دانیم که در متوازی الاضلاع، قطرهای همدیگر را نصف می کنند، لذا:

$$(x_O = \frac{x_A + x_D}{2}, x_O = \frac{x_B + x_C}{2}) \Rightarrow \frac{x_A + x_D}{2} = \frac{x_B + x_C}{2}$$

$$\Rightarrow x_A + x_D = x_B + x_C$$

$$(y_O = \frac{y_A + y_D}{2}, y_O = \frac{y_B + y_C}{2}) \Rightarrow \frac{y_A + y_D}{2} = \frac{y_B + y_C}{2}$$

$$\Rightarrow y_A + y_D = y_B + y_C$$

یعنی همیشه جمع مختصات دو رأس مقابل برابر است با جمع مختصات دو رأس مقابل دیگر.

مثال: نقاط $A(1, 4)$ ، $B(5, -2)$ و $C(0, 6)$ سه رأس متوالی یک لوزی هستند. مختصات رأس چهارم لوزی را به دست آورید.

حل:

$$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 1 + 0 = 5 + x_D \Rightarrow x_D = -4$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow 4 + 6 = -2 + y_D$$

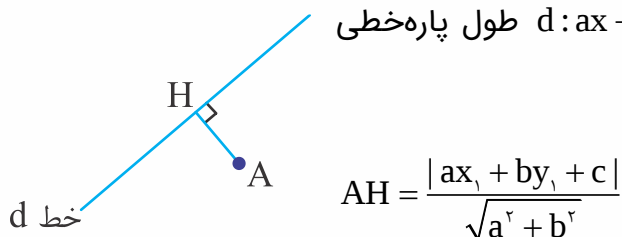
$$\Rightarrow y_D = 12 \Rightarrow D(-4, 12)$$





فاصله نقطه از خط

منظور از فاصله نقطه $A(x_1, y_1)$ تا خط $d: ax + by + c = 0$ طول پاره‌خطی است که از A عمود بر خط d رسم می‌شود.

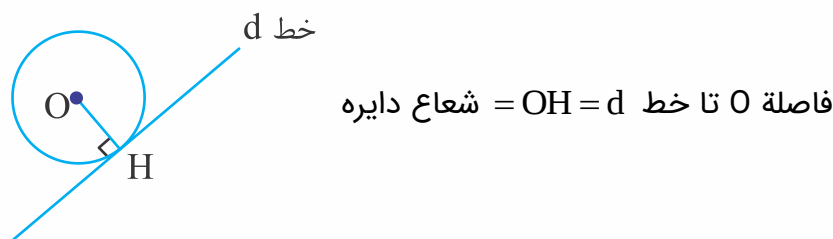


به عنوان مثال فاصله نقطه $A(3, 4)$ تا خط نیمساز ربع اول و سوم (خط $y = x$) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$y = x \Rightarrow -x + y = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}, \quad A(3, 4) \quad \begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ x_1 & y_1 \end{matrix}$$

$$AH = \frac{|(-1)(3) + (1)(4) + 0|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{|-3 + 4|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

نکته: اگر خطی بر یک دایره مماس باشد (دایره را در یک نقطه قطع کند)، فاصله مرکز دایره تا این خط، همان شعاع دایره است؛ چون خط مماس، بر شعاع گذرنده از نقطه تماس، عمود است.



مثال: خط $4x - 2y = 1$ بر دایره‌ای به مرکز $O(3, -6)$ مماس است. شعاع دایره را به دست آورید.
حل:

$$4x - 2y - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -2 \\ c = -1 \end{cases}, \quad O(3, -6) \quad \begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ x_1 & y_1 \end{matrix}$$

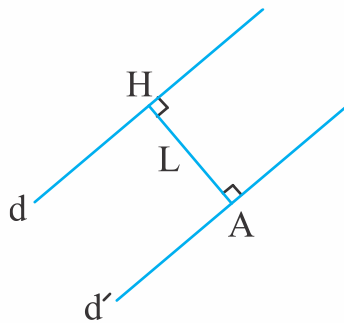
$$\text{شعاع} = OH = \frac{|4(3) + (-2)(-6) + (-1)|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2}} = \frac{23}{\sqrt{20}}$$



فاصله بین دو خط موازی

دو خط $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ با هم موازی اند و فاصله بین

آن‌ها به صورت زیر به دست می‌آید:



$$L = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

اثبات: کافی است فاصله یک نقطه روی یکی از دو خط را تا خط دیگر به دست آوریم، مثلاً ما به دلخواه فاصله $A(x_1, y_1)$ را تا خط d به دست می‌آوریم:

$$AH = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (1)$$

از طرفی نقطه A روی خط d' قرار دارد؛ پس می‌توانیم مختصاتش را در معادله این خط قرار دهیم.

$$ax + by + c' = 0 \xrightarrow{A(x_1, y_1) \in d'} ax_1 + by_1 + c' = 0$$

$$\Rightarrow ax_1 + by_1 = -c' \quad (2)$$

حال مقدار $ax_1 + by_1$ از رابطه (۲) را در رابطه (۱) قرار می‌دهیم:

$$AH = \frac{|-c' + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال: فاصله دو خط $x - 2y = 4$ و $3x - 6y = 10$ را به دست آورید.

حل: اگر معادله $x - 2y = 4$ را در ۳ ضرب کنیم به معادله $3x - 6y = 12$ می‌رسیم، با مقایسه این معادله و معادله خط دیگر یعنی $3x - 6y = 10$ متوجه می‌شویم که دو خط موازی‌اند؛ زیرا ضرایب x و y آن‌ها با هم مساوی است.

$$3x - 6y \overset{\downarrow c}{-12} = 0, \quad 3x - 6y \overset{\downarrow c'}{-10} = 0$$

$$L = \frac{|(-12) - (-10)|}{\sqrt{3^2 + (-6)^2}} = \frac{2}{\sqrt{45}}$$





تمرین کتاب درسی

فصل اول پایه یازدهم (هندسه تحلیلی و جبر)

۱- فاصله نقطه $P(7, -4)$ را از هر یک از خطوط با معادله‌های زیر به دست آورید:

الف) $L: 2x + y = 5$ ب) $T: x = 5$ پ) $\Delta: y = 0$

.....

.....

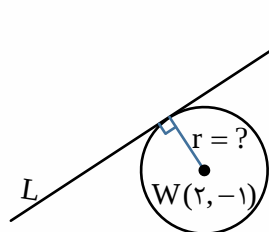
.....

.....

.....

۲- خط $L: 3x - 4y = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $W(2, -1)$ مماس است. شعاع دایره را بیابید.

(راهنمایی: خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطه تماس عمود است.)



.....

.....

.....

.....

.....

۳- وضعیت هر جفت از خطوط زیر را نسبت به هم مشخص کنید:

$L: 2x - y = 1$

$T: y = 2x - 3$

$\Delta: x + 2y = 0$

.....

.....

.....

.....

.....





۴- دو نقطه $A(14, 3)$ و $B(10, -13)$ را در نظر بگیرید. فاصله مبدأ مختصات را از وسط پاره خط AB به دست آورید.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

۵- نشان دهید مثلث با رأس‌های $A(1, 2)$ ، $B(2, 5)$ و $C(4, 1)$ یک مثلث متساوی الساقین قائم‌الزاویه است.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

۶- دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط $A(2, -2)$ و $B(6, 4)$ هستند.

(الف) اندازه شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

(ب) آیا نقطه $C(7, 3)$ بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟

.....

.....

.....

.....

.....



۷- نقاط $A(2, 3)$, $B(-1, 0)$ و $C(1, -2)$ سه رأس از مستطیل ABCD هستند. مختصات رأس چهارم آن را بیابید. (با دانستن این مطلب که در هر مستطیل، قطرهای منصف یکدیگرند، آیا می‌توانید راه حل کوتاه‌تری برای مسئله ارائه کنید؟)

.....

.....

.....

.....

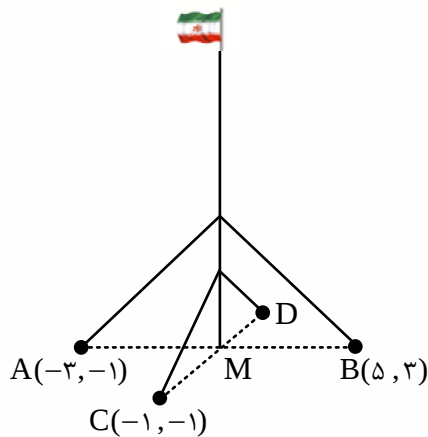
.....

.....

.....

.....

۸- یک میله پرچم بزرگ، مطابق شکل توسط کابل‌هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است، به طوری که فاصله هر یک از چهار نقطه تا پای میله برابر است با فاصله نقطه مقابل آن تا پای میله. مختصات نقطه D را به دست آورید.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



۹- یکی از اضلاع مربعی بر خط $L: y = 2x - 1$ واقع است. اگر $A(3, 0)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را به دست آورید.

.....

.....

.....

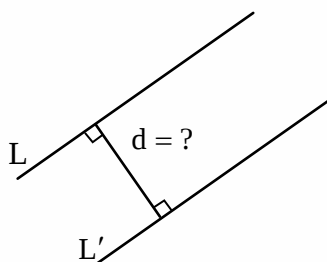
.....

.....

.....

.....

۱۰- الف) نشان دهید دو خط با معادلات $5x - 12y + 8 = 0$ و $-10x + 24y + 10 = 0$ با یکدیگر موازی‌اند.



ب) فاصله این دو خط را محاسبه کنید. (راهنمایی: یک نقطه دلخواه روی یکی از خطوط در نظر بگیرید و فاصله آن را از خط دیگر به دست آورید.)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



۱۱- طول جغرافیایی تبریز تقریباً ۴۶ درجه شرقی و عرض جغرافیایی آن حدود ۳۸ درجه شمالی است. برای راحتی، می‌توانیم موقعیت این شهر را به طور خلاصه، به صورت (۴۶, ۳۸) نشان دهیم. این اطلاعات درباره چابهار به صورت (۶۱, ۲۵) است. با فرض اینکه مسافت فیزیکی هر درجه طول جغرافیایی همانند مسافت فیزیکی هر درجه عرض جغرافیایی برابر ۱۱۰ کیلومتر باشد، مطلوب است محاسبه تقریبی فاصله این دو شهر.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

درس دوم: تابع درجه دوم و معادله درجه ۲

روش تغییر متغیر برای حل معادلات

گاهی اوقات، یک عبارت و توانی از آن عبارت در معادله دیده می‌شود که بهتر است آن عبارت را مثلاً t فرض کرده تا آن معادله، به یک معادله درجه دوم ساده تبدیل شود؛ سپس آن معادله را حل کرده تا t به دست آید. در نهایت به جای t ، عبارت اولیه را قرار می‌دهیم.

مثال: معادلات زیر را به روش تغییر متغیر حل کنید.

الف) $x^4 - 5x^2 - 6 = 0$

حل: الف) x^4 را می‌توان به شکل $(x^2)^2$ نوشت، پس x^2 و توان دوم x^2 در معادله دیده می‌شوند لذا نام x^2 را t در نظر می‌گیریم:

$$t^2 - 5t - 6 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (t-6)(t+1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=6 \Rightarrow x^2=6 \xrightarrow{\text{جذر}} x=\pm\sqrt{6} \\ t=-1 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow \text{نمی‌توان از } (-1) \text{ جذر گرفت} \end{cases}$$





$$\text{ب) } (x-1)^2 + 2\sqrt{3}(x-1) = 6$$

ب) عبارت $(x-1)$ دوبار تکرار شده، پس نام آن را t می‌گذاریم:

$$t^2 + 2\sqrt{3}t - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{3})^2 - 4(1)(-6)$$

$$= 12 + 24 = 36 \Rightarrow t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{36}}{2(1)}$$

$$= \frac{-2\sqrt{3} \pm 6}{2} = \frac{2(-\sqrt{3} \pm 3)}{2} = -\sqrt{3} \pm 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1 = -\sqrt{3} + 3 \Rightarrow x = 4 - \sqrt{3} \\ x-1 = -\sqrt{3} - 3 \Rightarrow x = -2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه ۲

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با فرض آن که $\Delta > 0$ است، مجموع ریشه‌ها (S) و حاصل ضرب ریشه‌ها (P) به صورت زیر خواهد بود:

$$S = \frac{-b}{a}, \quad P = \frac{c}{a}$$

اثبات: می‌دانیم اگر $\Delta > 0$ باشد، ریشه‌ها عبارت‌اند از:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$S = x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$P = x' \cdot x'' = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

نکته: در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ اگر a و c مختلف‌العلامت باشند معادله حتماً دو ریشه متمایز دارد؛ زیرا در رابطه $\Delta = b^2 - 4ac$ مقدار $a \cdot c$ منفی می‌شود؛ پس Δ مثبت خواهد بود. همچنین ریشه‌های معادله،

مختلف‌العلامت هستند زیرا $P = x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$ ولی $\frac{c}{a}$ منفی است؛ پس چون ضرب ریشه‌ها منفی شده است،

یکی مثبت و دیگری منفی است.





مثال: با توجه به معادله $x^2 + 5x - 3 = 0$ به سؤالات زیر پاسخ دهید:

(الف) بدون حل معادله، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های آن را به دست آورید.

(ب) بدون حل معادله، بگویید علامت ریشه‌ها چگونه است؟

حل: (الف) a و c علامت‌های مختلف دارند، لذا $\Delta > 0$ است و معادله حتماً دو ریشه متمایز دارد. حال S و

P را محاسبه می‌کنیم:

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-5}{1} = -5$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{-3}{1} = -3$$

(ب) علامت ریشه‌ها مختلف است (یکی مثبت و دیگری منفی)، چون a و c مختلف‌العلامت هستند.

تشکیل معادله درجه دوم با داشتن ریشه‌ها

اگر ریشه‌های یک معادله درجه دوم α و β باشند، خود آن معادله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0 \Rightarrow x^2 - \underbrace{\beta x - \alpha x + \alpha\beta}_{\text{فاکتورگیری}} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \underbrace{(\alpha + \beta)}_{S} x + \underbrace{\alpha\beta}_P = 0 \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

پس اگر α و β داده شوند $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ را پیدا کرده و آن‌ها را در فرمول $x^2 - Sx + P = 0$ قرار می‌دهیم.

مثال: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{3}$ باشد.

حل:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{3} + \frac{1 - \sqrt{5}}{3} = \frac{2}{3} \\ P = \alpha\beta = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{3}\right)\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{3}\right) = \frac{1^2 - \sqrt{5}^2}{9} = \frac{1 - 5}{9} = \frac{-4}{9} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x^2 - Sx + P = 0} x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{4}{9} = 0$$

معادله مطلوب:



ماکزیم و مینیم سهمی

می‌دانیم طول رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ یعنی نقطه S از رابطه $x_s = \frac{-b}{2a}$ به دست می‌آید. حال اگر

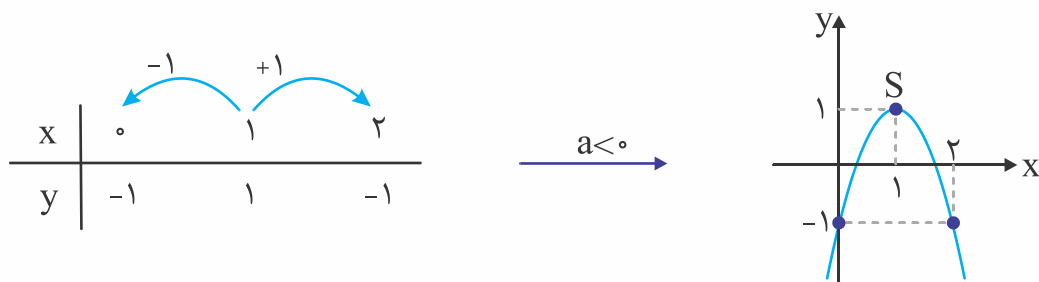
این عدد را به جای xهای معادله سهمی قرار دهیم مقدار y_s به دست می‌آید که همان مقدار ماکزیم یا مینیم سهمی است (اگر $a > 0$ باشد مینیم و اگر $a < 0$ باشد ماکزیم است). ضمناً مستقیماً می‌توانیم

مقدار ماکزیم یا مینیم را از رابطه $y = \frac{-\Delta}{4a}$ به دست آوریم.

مثال: بیشترین مقدار (ماکزیم) تابع $f(x) = -2x^2 + 4x - 1$ را به دست آورده و نمودار آن را رسم کنید.

حل:

$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-2)} = 1 \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم}]{\text{در معادله } f(x)} y_s = -2(1)^2 + 4(1) - 1 = 1 \Rightarrow S(1, 1)$$



بهینه‌سازی

یعنی ماکزیم کردن مقدار یک عبارت درجه دوم. برای این منظور، عبارتی را که می‌خواهیم ماکزیم شود

فقط برحسب یک متغیر می‌نویسیم؛ سپس از فرمول $(\text{مقدار متغیر} = \frac{-b}{2a})$ استفاده می‌کنیم.

مثال: اگر رابطه $2x + y = 20$ برقرار باشد، مقادیر x و y را طوری بیابید که عبارت xy ماکزیم (حداکثر) شود؟ سپس مقدار ماکزیم را به دست آورید.

حل: از رابطه $2x + y = 20$ به دلخواه x یا y را برحسب دیگری به دست می‌آوریم و در عبارت xy قرار می‌دهیم تا این عبارت فقط شامل یک متغیر شود:

$$2x + y = 20 \Rightarrow y = -2x + 20$$

$$\text{عبارت اصلی } xy = x(-2x + 20) = -10x^2 + 20x$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-20}{2(-10)} = 1$$

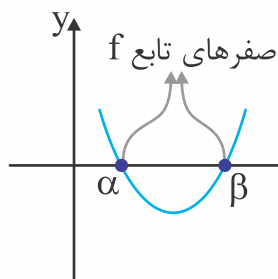


$$y = -2x + 20 \xrightarrow{x=5} y = -2(5) + 20 = 10$$

$$\text{ماکزیم عبارت اصلی} = 5xy = 5 \times 5 \times 10 = 250$$

البته اگر $x = 5$ را در $(-10x^2 + 100x)$ هم قرار دهیم، باز هم به جواب ۲۵۰ خواهیم رسید.

صفه‌های تابع درجه دوم



منظور از صفه‌های تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ همان ریشه‌های

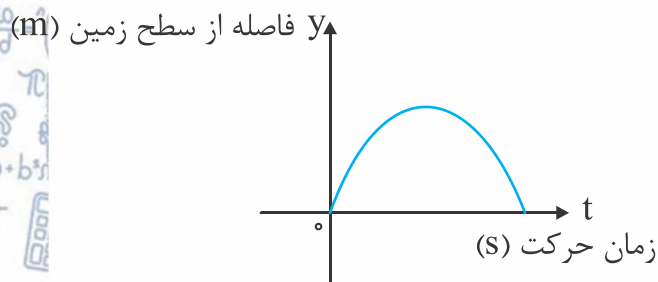
معادله $ax^2 + bx + c = 0$ می‌باشد. ضمناً می‌دانید که این ریشه‌ها محل

برخورد سهمی با محور x ها را نشان می‌دهند، در شکل روبه‌رو، α و β

صفه‌های تابع f هستند.

مثال: نمودار مکان - زمان گلوله کوچکی که در راستای قائم با سرعت اولیه 30 m/s به طرف بالا پرتاب

می‌شود به شکل زیر است. اگر ضابطه این نمودار $y = -10t^2 + 40t$ باشد، مشخص کنید که:

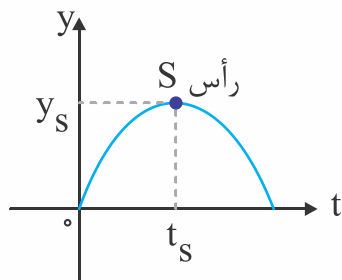


الف) پس از چند ثانیه، گلوله به بالاترین نقطه ممکن می‌رسد؟

ب) بیشترین ارتفاع گلوله از سطح زمین چقدر است؟

پ) گلوله پس از چند ثانیه به زمین می‌رسد؟

حل: الف)



$$t_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-40}{2(-10)} = 2$$

زمان رسیدن گلوله به نقطه اوج خود: ۲





(ب)

$$y = -1 \cdot t^2 + 4 \cdot t \xrightarrow{t_s=2} y_s = -1 \cdot (2)^2 + 4 \cdot (2)$$

$$= -40 + 80 = 40 \text{ متر}$$

پس حداکثر ارتفاع گلوله از سطح زمین ۴۰ متر است.

(پ)

$$y = -1 \cdot t^2 + 4 \cdot t \xrightarrow[\text{باید } y=0 \text{ باشد}]{\text{برخورد با زمین یعنی}} -1 \cdot t^2 + 4 \cdot t = 0$$

$$\Rightarrow t(-1 \cdot t + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 & (\text{غ ق ق}) \\ t = 4 & (\text{ق ق}) \end{cases}$$

لذا پس از ۴ ثانیه از پرتاب، گلوله به زمین می‌خورد.

مشخص کردن علامت‌های c ، b ، a ، تعداد و علامت صفرهای تابع $y = ax^2 + bx + c$ با داشتن نمودار آن:

در این‌گونه سؤالات، ابتدا علامت a را با توجه به این‌که سهمی به شکل  یا  است مشخص

می‌کنیم؛ بعد از آن نگاه می‌کنیم که رأس سهمی (نقطه S) در کدام ربع است و به کمک $x_s = \frac{-b}{2a}$ و علامت

طول رأس، علامت b هم تعیین می‌شود. در نهایت، عرض از مبدأ سهمی را تعیین می‌کنیم. اگر سهمی، محور

ها را بالای مبدأ قطع کرده باشد، $c > 0$ و اگر پایین مبدأ قطع کرده باشد $c < 0$ است. صفرهای سهمی نیز،

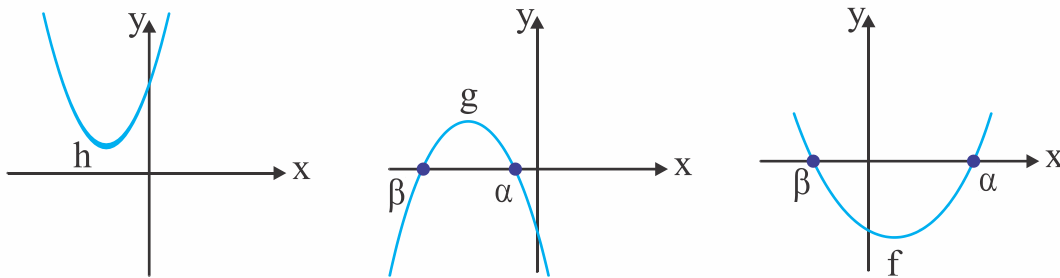
همان نقاط برخورد با محور x ها هستند و می‌دانید اگر نقطه‌ای روی محور x ها و سمت راست مبدأ باشد،

طولش مثبت و اگر سمت چپ مبدأ باشد طولش منفی است.



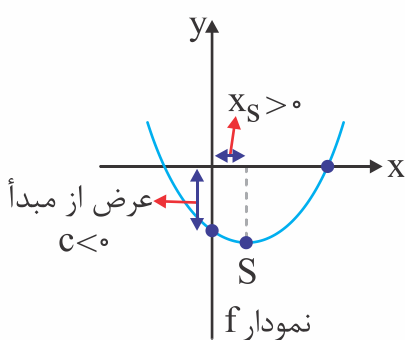


به عنوان مثال، جدول زیر را با توجه به نمودارهای f ، g و h پر می‌کنیم (سر جلسه امتحان، نام‌های α و β ذکر نمی‌شود، ما خودمان آن‌ها را α و β نامیده‌ایم).



ویژگی \ تابع	f	g	h
علامت a	+	-	+
علامت b	-	-	+
علامت c	-	-	+
تعداد ریشه‌ها	۲	۲	صفر (سه‌می محور xها را قطع نکرده)
علامت ریشه‌ها (در صورت وجود)	یکی مثبت و یکی منفی (α مثبت و β منفی است.)	هر دو ریشه منفی (α و β سمت چپ مبدأ هستند.)	-----

برای آن‌که متوجه شوید جدول را چطور پر کرده‌ایم، یک ستون آن، مثلاً نمودار f را بررسی می‌کنیم. با توجه



به شکل، دهانه نمودار f به سمت بالاست، پس $a > 0$ است. از طرفی،

رأس سهی در ربع چهارم است و می‌دانیم در ربع چهارم، طول نقاط مثبت

هستند، لذا طول رأس هم مثبت است: a مثبت است، پس b باید منفی

$$\text{باشد که کل کسر مثبت شود. } \Rightarrow x_s = \frac{-b}{2a} > 0$$

حال سراغ عرض از مبدأ سهی می‌رویم، سهی محور y ها را پایین مبدأ

قطع کرده، لذا $c < 0$ است.



مشخص کردن علامت ریشه‌های معادله درجه دوم بدون حل کردن معادله

$$\Delta > 0 \begin{cases} P > 0 \xrightarrow[\text{هم علامت اند}]{\text{ریشه ۲}} \begin{cases} S > 0 & \text{هر ۲ ریشه مثبت اند.} \\ S < 0 & \text{هر ۲ ریشه منفی اند.} \end{cases} \\ P < 0 \xrightarrow[\text{مختلف علامت اند}]{\text{ریشه ها}} \begin{cases} S > 0 & \text{ریشه مثبت از قدر مطلق ریشه منفی بزرگ تر است.} \\ S < 0 & \text{قدر مطلق ریشه منفی، از ریشه مثبت بزرگ تر است.} \end{cases} \end{cases}$$

مثال: بدون حل معادله و با استفاده از Δ ، S و P در وجود و علامت ریشه‌های معادله $x^2 - 7x - 18 = 0$

بحث کنید.

حل:

$$\begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac = 49 - 4(1)(-18) = 121 > 0 \Rightarrow \text{معادله ۲ ریشه متمایز دارد} \\ P = \frac{c}{a} = -18 < 0 \Rightarrow \text{ریشه ها مختلف علامت اند} \\ S = \frac{-b}{a} = 7 > 0 \Rightarrow \text{ریشه مثبت، از قدر مطلق ریشه منفی، بزرگ تر است.} \end{cases}$$

تمرین کتاب درسی

۱۲- معادله‌های زیر را حل کنید.

(ب) $4x^6 + 1 = 5x^3$

(الف) $x^4 - 8x^2 + 8 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

۱۳- معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $1 - \sqrt{2}$ و $1 + \sqrt{2}$ باشد.

.....

.....

.....





۱۴- مقدار ماکزیمم یا مینیمم توابع با ضابطه‌های زیر را به دست آورید.

ب) $g(x) = 3x^2 + 6x + 5$

الف) $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

۱۵- موشکی که به طور عمودی رو به بالا شلیک شده، t ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع h متری از سطح زمین

$h(t) = 100t - 5t^2 \quad (t \geq 0)$

قرار می‌گیرد که معادله آن به صورت مقابل است.

الف) چقدر طول می‌کشد تا موشک به بالاترین ارتفاع ممکن خود برسد؟

ب) ارتفاع نقطه اوج را بیابید.

پ) چند ثانیه پس از پرتاب، موشک به زمین باز می‌گردد؟

.....

.....

.....

.....

.....

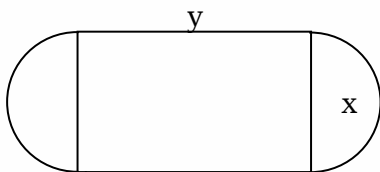
.....

.....





۱۶- استادیومی به شکل مقابل در حال ساخت است که در آن $x \geq 0$ و $y \geq 0$ و نیم‌دایره‌ها به شعاع $\frac{x}{2}$

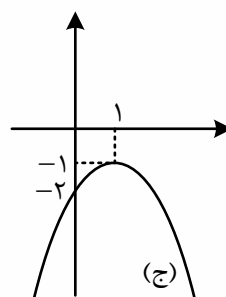
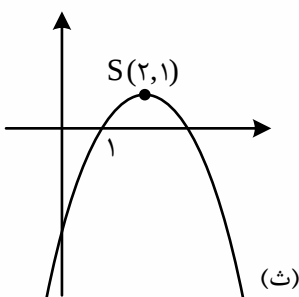
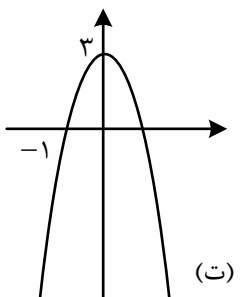
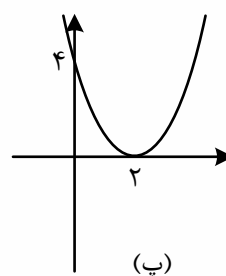
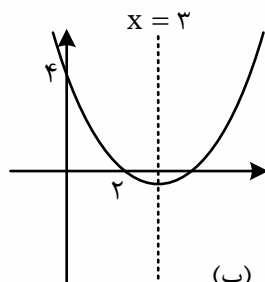
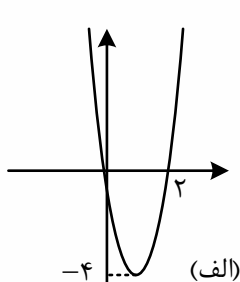


هستند. اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، x و y را طوری بیابید که:

(الف) مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد.

(ب) مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.

۱۷- ضابطهٔ جبری سهمی‌های زیر را بنویسید.





معادلات گویا

معادلاتی هستند که در مخرج یک یا چند کسر خود، دارای متغیر هستند. برای حل این گونه معادلات، ابتدا مخرج ها را تا حد امکان تجزیه می کنیم، سپس تمام جملات معادله را در ک.م.م مخرج ها ضرب می کنیم تا به یک معادله غیرکسری برسیم. پس از حل این معادله، دقت می کنیم جواب یا جواب ها، نباید حاصل هیچ مخرجی را در معادله اولیه به صفر تبدیل کنند.

مثال: معادله $\frac{2x+3}{2x-2} - \frac{5}{x^2-1} = \frac{2x-3}{2x+2}$ را حل کنید.

حل:

$$\Rightarrow \text{تجزیه مخرج ها} \begin{cases} 2x-2 = 2(x-1) \\ x^2-1 = (x-1)(x+1) \\ 2x+2 = 2(x+1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{ک.م.م} = 2(x-1)(x+1)$$

$$\Rightarrow 2(x-1)(x+1) \left[\frac{2x+3}{2(x-1)} - \frac{5}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x-3}{2(x+1)} \right]$$

$$\Rightarrow (x+1)(2x+3) - 5 \times 2 = (x-1)(2x-3) \Rightarrow x=1$$

ولی $x=1$ حداقل یکی از مخرج های معادله اولیه را به صفر تبدیل می کند؛ پس قابل قبول نبوده و می گوئیم معادله، فاقد ریشه است.

نکته: گاهی اوقات برای یک مسئله توصیفی، معادله ای گویا تشکیل می دهیم تا مجهول یا مجهولات مسئله به دست آید. پس از حل معادله، به شرط اولیه سؤال توجه کنید و ببینید آیا جواب قابل قبول است یا خیر.





مثال: می‌خواهیم یک کیک را طوری بین چند نفر تقسیم کنیم که به هر یک، مقدار مساوی برسد. اگر یک نفر دیگر به جمع آن‌ها اضافه شود و بخواهیم آن کیک را مجدداً به مقدارهای مساوی بینشان تقسیم کنیم به هر نفر به اندازه $\frac{1}{6}$ کل کیک، کمتر خواهد رسید. در ابتدا آن‌ها چند نفر بوده‌اند؟

حل: اگر تعداد نفرات اولیه را x فرض کنیم می‌توانیم با تشکیل یک معادله گویا، مجهول را به دست آوریم:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{6} \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 & (\text{غ ق ق}) \\ x = 2 & (\text{ق ق ق}) \end{cases}$$

عدد طلایی و مستطیل طلایی: به عدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ که مقدار تقریبی آن $1/618$ است عدد طلایی می‌گوییم.

مستطیل طلایی، مستطیلی است که بین طول (x) و عرض (y) آن رابطه $\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$ برقرار باشد. حال

اگر y را فرض کنیم، عدد طلایی به دست می‌آید:

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1} \xrightarrow{\text{طرفین و سطین}} x^2 = x+1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-1) = 5 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1+\sqrt{5}}{2} & (\text{ق ق ق}) \\ x'' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} & (\text{غ ق ق}) \end{cases}$$

معادلات رادیکالی (گنگ)

معادلاتی هستند که در آن‌ها متغیر، زیر رادیکال قرار دارد. برای حل این‌گونه معادلات، ابتدا قسمت رادیکالی را از بقیه قسمت‌ها جدا می‌کنیم، سپس طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم. (در کتاب شما فرجه رادیکال‌ها، همیشه ۲ است). پس از یافتن جواب (ها) باید آن (ها) را در معادله اولیه جای‌گذاری کنیم و مطمئن شویم که دو طرف معادله با هم مساوی می‌شوند. ضمناً زیر رادیکال هم، نباید منفی شود. (گاهی لازم است عمل به توان ۲ رساندن را دو بار انجام دهیم).





مثال: معادله‌های رادیکالی زیر را حل کنید.

الف) $\sqrt{x+1} + 5 = x$

ب) $\sqrt{t} + 5 = 0$

پ) $\sqrt{15} + \sqrt{2x+80} = 5$

حل:

$$\sqrt{x+1} = x - 5 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x+1 = x^2 + 25 - 10x$$

$$\Rightarrow \underbrace{x^2 - 11x + 24}_{\text{اتحاد جمله مشترک}} = 0 \Rightarrow (x-8)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=8 & (\text{ق ق}) \\ x=3 & (\text{غ ق ق}) \end{cases}$$

ولی $x=3$ قابل قبول نیست، چون اگر آن را در معادله اولیه (صورت سؤال) قرار دهیم به رابطه غلط $7=3$ می‌رسیم.

ب) $\sqrt{t}$ عبارتی نامنفی است (یا صفر است یا مثبت) پس جمع آن با عدد ۵، هیچ‌گاه نمی‌تواند صفر باشد، لذا این معادله، فاقد جواب است.

پ)

$$\sqrt{15} + \sqrt{2x+80} = 5 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 15 + \sqrt{2x+80} = 25$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x+80} = 10 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 2x+80 = 100 \Rightarrow 2x = 20$$

$$\Rightarrow x = 10$$

جواب، قابل قبول است، چون در معادله اولیه، صدق می‌کند.

نکته: اگر مجموع دو عبارت نامنفی (مانند دو رادیکال با فرجه زوج) برابر صفر باشد، تک‌تک آن عبارت‌ها باید صفر باشند. مثلاً می‌خواهیم معادله $\sqrt{x^2-4} + \sqrt{3x-6} = 0$ را حل کنیم. جمع دو رادیکال با فرجه زوج، صفر شده، پس تک‌تک آن‌ها باید صفر باشند:

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ 3x - 6 = 0 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x = 2$$

اگر می‌خواستیم این معادله را به روش معمولی حل کنیم، باید یکی از رادیکال‌ها را به طرف راست می‌بردیم و دو طرف معادله را به توان ۲ می‌رساندیم. در این صورت به جواب‌های $x=2$ و $x=1$ می‌رسیدیم که عدد ۱ رد می‌شد (در معادله صدق نمی‌کرد).





تمرین کتاب درسی

۱۸- معادلات زیر را مانند نمونه حل کنید. آیا تمام جوابهای حاصل، قابل قبول اند؟

الف) $2\sqrt{2t-1} - t = 1$

ب) $2x = 1 - \sqrt{2-x}$

$$2\sqrt{2t-1} = t+1$$

$$\sqrt{2-x} = 1-2x$$

$$\Rightarrow 4(2t-1) = (t+1)^2$$

$$\Rightarrow 2-x = 1+4x^2-4x$$

$$\Rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (t-1)(t-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=5 \end{cases}$$

$$\Delta = 25, x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2(4)} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

غیرقابل قبول

پ) $\sqrt{x+7} = \sqrt{x} + 1$

ت) $\frac{1}{\sqrt{u-3}} - \frac{2}{\sqrt{u}} = 0$

ث) $2 + \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

۱۹- توضیح دهید که چرا معادلات زیر، فاقد ریشه حقیقی اند.

الف) $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+3} + 1 = 0$

ب) $\sqrt{1-x} + \sqrt{x-2} = 0$

پ) $\sqrt{t+2} = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....





۲۰- هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = 5 \text{ (الف)}$$

$$\frac{10}{r} - \frac{15}{2} = \frac{20}{3r} - 5 \text{ (ب)}$$

$$\frac{2x}{x-3} + \frac{x+1}{x+4} = \frac{x-1}{x-3} \text{ (پ)}$$

$$\sqrt{t+4} = 3 \text{ (ت)}$$

$$k = \sqrt{6k-8} \text{ (ث)}$$

$$x + \sqrt{x} = 6 \text{ (ج)}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = 1 \text{ (چ)}$$

$$\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} = 2 \text{ (ح)}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

۲۱- علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجله ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کنند. پس از حروفچینی مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش حدود ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می‌انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟

.....

.....

.....

.....

.....





۲۲- اگر یک شی از بالای ساختمانی به ارتفاع ۵۰ متر سقوط آزاد کند، پس از t ثانیه در ارتفاع h متری از سطح

زمین قرار خواهد داشت، به طوریکه $t = \sqrt{10 - \frac{h}{5}}$ این جسم، دو ثانیه پس از سقوط در چه ارتفاعی نسبت

به سطح زمین قرار دارد؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

۲۳- الف) عدد صحیحی بیابید که تفاضل آن از جذرش برابر نصف آن عدد باشد. مسئله چند جواب دارد؟

ب) عدد صحیحی بیابید که تفاضل جذرش از آن عدد برابر نصف آن باشد. مسئله چند جواب دارد؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

۲۴- معادله‌ای شامل مجموع دو عبارت رادیکالی بنویسید که عدد ۱ یکی از ریشه‌های آن باشد. پاسخ خود را

با پاسخ دوستان خود مقایسه کنید.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

