

جزوه تدریس

به سبک استاد علی داودوندی رتبه ۶۱ کنکور



برای استفاده بهتر از این جزوه ابتدا ویدیو مربوط به این مبحث را در آپارات یا یوتیوب مشاهده کنید. حتی اگر بخش کوچکی از این مبحث رو مدنظر دارید ببینید از روی **تایم لاین** های مشخص شده میتوانید آن را پیدا کنید.

 ALIDAVOODVANDI.IR

 [ALI.DAVOODVANDI](https://www.instagram.com/ALI.DAVOODVANDI)

 [ALI_DAVOODVANDI](https://www.youtube.com/ALI_DAVOODVANDI)

 [ALI_DAVOODVANDI](https://www.tiktok.com/ALI_DAVOODVANDI)

 ۰۹۳۸۳۱۶۵۳۵۴

 [ALI_DAVOODVANDI](https://www.telegram.me/ALI_DAVOODVANDI)



ایستگاه ۱: معادلات درجه اول و دوم و روش‌های حل این معادلات

معادله درجه اول و دوم

۱- معادله درجه اول: معادله‌ای بر حسب متغیر x ، که بعد از ساده شدن، بزرگ‌ترین توان مجهولش ۱ باشد،

را معادله درجه اول می‌گوییم. فرم کلی این معادله به صورت $ax + b = 0$ و مقدار ریشه آن $x = -\frac{b}{a}$ است.

دقت: برای حل معادله درجه اول، ابتدا اعداد ثابت را به سمت راست تساوی منتقل کرده، سپس دو طرف را بر ضریب مجهول تقسیم می‌کنیم...

! واضح است جمله بالا برای زمانی که $a \neq 0$ باشد، درست است. بد نیست بدانید در معادله $ax + b = 0$ ،

(الف) اگر $a = b = 0$ باشند، معادله بی‌شمار جواب دارد و هر x ای در آن صدق می‌کند.

(ب) اگر $a = 0$ بوده ولی $b \neq 0$ باشد، معادله جواب ندارد و هیچ x ای آن را برقرار نمی‌کند!

تست: دو برابر عددی را از ۲۵ کم کرده‌ایم و حاصل، نصف همان عدد شده است. مساحت مربعی که ضلعش این عدد باشد، کدام است؟

۲۵۶ (۴)

۶۴ (۳)

۱۴۴ (۲)

۱۰۰ (۱)

پاسخ:

$$25(-2x) = \frac{x}{2} \xrightarrow{\text{مرتب کن}} 25 = \frac{x}{2} + 2x \xrightarrow{\text{ساده کن}} 25 = \frac{x + 4x}{2} \Rightarrow 25 = \frac{5x}{2} \xrightarrow{\times \frac{2}{5}} 10 = x \xrightarrow{\text{مساحت مربع به توان ۲ برسون}} x^2 = 100$$

۲- معادله درجه دوم: معادله‌ای که پس از ساده شدن بزرگ‌ترین توان متغیر آن، ۲ باشد معادله درجه دوم

می‌گوییم. فرم کلی این معادله به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ است؛ که $a \neq 0$ و b و c در آن سه عدد ثابت و معلوم هستند و البته $a \neq 0$ است!

معادله $x^2 =$

یک معادله خیلی کاربردی، این است که بعد از ساده کردن معادله، برسیم به عبارت «عدد ثابت $= x^2$ » مثل

$x^2 = 3$. اما روش حل شما، طبق جدول زیر خواهد بود؛ (دقت کنید که u ، عبارتی بر حسب x بوده و A عددی ثابت است!)

$A = 0$	$A < 0$	$A > 0$	
نتیجه می‌دهد: $u = 0$	ریشه ندارد. عدد مثبت u^2 ، هیچ‌گاه برابر عدد منفی نمی‌شود!	نتیجه می‌دهد: $u = \sqrt{A}$ و $u = -\sqrt{A}$	$u^2 = A$

تست: در معادله $9\left(2x + \frac{5}{3}\right)^2 - 1 = 0$ ، مقدار ریشه کوچک‌تر کدام است؟

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) $-\frac{4}{3}$ (۴) $-\frac{2}{3}$

پاسخ:

$$9\left(2x + \frac{5}{3}\right)^2 - 1 = 0 \xrightarrow{\text{انتقال ۱ به سمت راست}} 9\left(2x + \frac{5}{3}\right)^2 = 1 \xrightarrow{\div 9} \left(2x + \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\xrightarrow{u = 2x + \frac{5}{3}} \begin{cases} 2x + \frac{5}{3} = \frac{1}{3} \\ 2x + \frac{5}{3} = -\frac{1}{3} \end{cases} \xrightarrow{-\frac{5}{3}} \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ x = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{ریشه کوچک‌تر}} x = -1$$

! عبارت «عدد مثبت + u^2 »، همواره مثبت بوده و در واقع هیچ‌گاه منفی یا صفر نمی‌شود؛

مثل: $5 + (2x - 3)^2$.

حل معادله درجه دوم با روش تجزیه

در معادله درجه دومی که ضریب x^2 در آن ۱ باشد، به عنوان ساده‌ترین راه، می‌رویم سراغ تجزیه! در این

روش معادله $x^2 + mx + n = 0$ را در نظر گرفته و

۱- فرم تجزیه شده معادله را می‌نویسیم: $(x + \text{☁})(x + \text{☁}) = 0$

۲- برای پیدا کردن ☁ها، به دنبال دو عدد می‌گردیم که ضربشان بشود n و جمعشان هم m ،

۳- حالا اون دو تا عددی را که پیدا کردید جای‌گذاری کنید و ریشه‌ها را بیابید. این روش برای حل معادله درجه دوم، کلی نیست، گاهی دو عدد با ضرب و جمع می‌خواهید پیدا نمی‌کنید.



■ اگر ضرب چند عبارت، مساوی صفر شود، تک تک آن‌ها را مساوی صفر می‌گذاریم.

تست: در معادله $x^2 + 20x + 51 = 0$ ، تفاضل ریشه‌ها کدام است؟

(۱) عدد فرد (۲) مضرب ۳ (۳) مضرب ۷ (۴) عدد اول

پاسخ:

دنبال دو عدد با حاصل ضرب ۵۱ هستیم و ۵۱ به صورت 17×3 تجزیه می‌شود که اتفاقاً جمع آن‌ها ۲۰ است. پس برای داشتن جمع ۲۰، دو عدد ۳- و ۱۷- را در نظر می‌گیریم:

$$x^2 - 20x + 51 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (x + \text{cloud})(x + \text{cloud}) = 0 \xrightarrow{\substack{51=17 \times 3 \\ -20 = (-17) + (-3)}} (x - 17)(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 17 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x = 17, x = 3 \xrightarrow{\text{تفاضل ریشه‌ها}} 17 - 3 = 14 \xrightarrow{\text{مطابقت با گزینه‌ها}} 14 \text{ مضرب } 7 \text{ است.}$$

■ یکی از حالت‌هایی که روش تجزیه برای حل معادله درجه دوم خیلی سریع و خوب است، وقتی است

که معادله درجه دوم شما عدد ثابت نداشته باشد؛ **این طوری:** $ax^2 + bx = 0$.

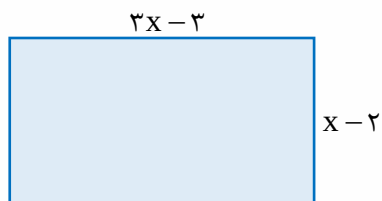
در این حالت سریع از x ، فاکتور گرفته و به حاصل ضرب دو عدد می‌رسیم که مساوی صفر شده است، بعدش معادله حل می‌شود...

این جوری هم ببین: اگر $ax^2 + bx = 0$ شود، ریشه‌ها عبارت‌اند از $x = 0$ و $x = -\frac{b}{a}$. آخه:

$$ax^2 + bx = 0 \xrightarrow{\text{فاکتور}} x(ax + b) = 0$$



تست: مساحت مستطیل مقابل برابر ۶ است. کدام گزینه درباره x درست است؟



(۱) عددی زوج است.

(۲) عددی مربع کامل است.

(۳) عددی دو رقمی است.

(۴) عددی اول است.

پاسخ:

$$S_{\text{مستطیل}} = \text{طول} \times \text{عرض} \Rightarrow S = (3x-3)(x-2) \xrightarrow{\text{مساوی ۶ بذار}} (3x-3)(x-2) = 6$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب و ساده کن}} 3x^2 - 9x + 6 = 6 \xrightarrow{-6} 3x^2 - 9x = 0 \xrightarrow{\text{فاکتور بگیر}} 3x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0, 3$$

چون ضلع مستطیل نمی‌تواند منفی و صفر باشد، $x=0$ قبول نیست، پس $x=3$ است که عددی اول می‌باشد.





ایجاد مربع کامل

هر چند حل معادله درجه دوم با روش ایجاد مربع کامل، خیلی راه سریع و متداولی نیست؛ اما به هر حال ساختن مربع کامل تکنیک لازمی است که هر دانش‌آموزی باید آن را بلد باشد!

برای ایجاد مربع کامل در عبارت $ax^2 + bx + c$ مراحل زیر را اجرا کنید:

۱- در دو جمله اول از ضریب x^2 فاکتور بگیرید: $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$

۲- عبارت درجه دوم توی پرانتز را به صورت اتحاد اول درآورید؛ این طوری: $(x + \text{cloud})^2$ ، خوب برای انجام

این کار توجه کنید که: جمله اول، همیشه x است و کنار آن هم نصف ضریب x رو می‌نویسید: $\text{cloud} = \frac{b}{2a}$

۳- برای این که عبارت تغییر نکند، توان دوم عددی را که درون پرانتز نوشتید، کم کنید.

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c$$

همیشه

ضرب x رو نصف کن!

۴- حالا می‌توانید a را ضرب کنید...

بین: $8x^2 + 4x + 1$ را مربع کامل می‌کنیم:

$$8x^2 + 4x + 1 \xrightarrow[\text{در دو جمله اول}]{\text{فاکتور از ۸}} 8\left(x^2 + \frac{1}{2}x\right) + 1 \xrightarrow[\text{توان ۲}]{\text{ساختن اتحاد اول}} 8\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right] + 1$$

$\div 2$

$$\xrightarrow[\text{ضرب کردن ۸}]{\text{ساده کردن}} 8\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 \rightarrow 8\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

حالا حل معادله $3x^2 + 2x - 8 = 0$ را با روش ایجاد مربع کامل ببینید:

$$3\left(x^2 + \frac{2}{3}x\right) - 8 = 0 \Rightarrow 3\left[\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right] - 8 = 0 \xrightarrow{\text{ضرب 3}} 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{25}{3}$$

$\div 3$ توان ۲

$$\xrightarrow{\div 3} \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} \Rightarrow x + \frac{1}{3} = \pm \frac{5}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ x = -2 \end{cases}$$

حل معادله درجه دوم با روش Δ

متداولترین روش حل معادله درجه دوم، همین است.

در معادله $ax^2 + bx + c = 0$:

۱- Δ را پیدا می‌کنیم: $\Delta = b^2 - 4ac$

۲- مقدار ریشه‌ها، در صورتی که Δ منفی نباشد، عبارت‌اند از: $x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

تست: در معادله درجه دوم $(\sqrt{3} + 1)x^2 - x + 1 = \sqrt{3}$ ، مقدار ریشه مثبت کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3} - 1$ (۲) $\sqrt{3} + 1$ (۳) $2\sqrt{3} - 1$ (۴) $2\sqrt{3} - 2$

پاسخ:

$$(\sqrt{3} + 1)x^2 - x + 1 = \sqrt{3} \xrightarrow{\text{مرتب کن}} \left(\sqrt{3} + 1\right)x^2 - x + \left(1 - \sqrt{3}\right) = 0 \xrightarrow{\Delta \text{ رو پیدا کن}} \Delta = (-1)^2 - 4(\sqrt{3} + 1)(1 - \sqrt{3}) = 9$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x = \frac{1 + 3}{2(\sqrt{3} + 1)}, x = \frac{1 - 3}{2(\sqrt{3} + 1)} \xrightarrow{\text{ریشه مثبت}} \frac{1 + 3}{2(\sqrt{3} + 1)} \xrightarrow{\text{ساده کن}} \frac{2}{\sqrt{3} + 1}$$

$$\xrightarrow{\text{گویا کن}} \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \sqrt{3} - 1$$



دو معادله درجه دوم خاص

۱- اگر در معادله درجه دومی، مجموع هر سه ضریب، برابر صفر شود، مثل $5x^2 + 6x - 11 = 0$ ، یکی از ریشه‌ها همواره ۱ بوده و دیگری هم می‌شود: نسبت عدد ثابت معادله به ضریب x^2 .

این جوری هم ببین: اگر در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ داشته باشیم: $a + b + c = 0$ ، آن وقت: $x = 1$ و $x = \frac{c}{a}$

۲- اگر در معادله درجه دومی، مجموع ضریب اولی و آخری برابر ضریب وسطی باشد،

مثل $5x^2 + 6x + 1 = 0$ ، یکی از ریشه‌ها، همواره ۱- بوده و دیگری هم می‌شود: قرینه عدد ثابت معادله،
 $5 + 1 = 6$

تقسیم بر ضریب x^2 .

دقت: اگر در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ داشته باشیم $a + b = c$ در این صورت: $x = -1$ و

$$x = -\frac{c}{a}$$

یه سطح بالاتر! در هر معادله‌ای و با هر درجه‌ای که داشته باشد، اگر مجموع همه ضریب‌ها برابر صفر شود،

حتماً یکی از ریشه‌های معادله $x = 1$ بوده است، برای تعیین بقیه ریشه‌ها، عبارت را بر $x - 1$ تقسیم می‌کنیم...

تست: در معادله $(2\sqrt{2}-1)x^2 - \sqrt{2}x + (1-\sqrt{2}) = 0$ یکی از ریشه‌ها کدام است؟

$$\frac{\sqrt{2}-3}{7} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{2}-3}{9} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{2}-1}{9} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{2}-1}{7} \quad (3)$$

پاسخ:

$$a = 2\sqrt{2}-1, b = -\sqrt{2}, c = 1-\sqrt{2} \xrightarrow{a+b+c} (2\sqrt{2}-1) + (-\sqrt{2}) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x=1, x=\frac{c}{a}=\frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1} \xrightarrow{\text{گویا کن}} \frac{(1-\sqrt{2})(2\sqrt{2}+1)}{(2\sqrt{2}-1)(2\sqrt{2}+1)} \xrightarrow{\text{ضرب کن}} \frac{\sqrt{2}-3}{7}$$

تست: در معادله $(3m+1)x^2 - 5x + 2 - 5m = 0$ یکی از ریشه‌ها -۱ است. حاصل جمع ریشه دیگر معادله با

m کدام است؟

$\frac{71}{13}$ (۴)

$\frac{70}{13}$ (۳)

$\frac{17}{13}$ (۲)

$\frac{18}{13}$ (۱)

پاسخ:

۱ $x = -1 \Rightarrow a + c = b \Rightarrow (3m+1) + (2-5m) = -5 \xrightarrow{\text{ساده کن}} -2m + 3 = -5 \xrightarrow{\text{حل کن}} -2m = -8 \Rightarrow m = 4$

۲ $x = -1 \xrightarrow{\text{ریشه دیگر}} x = -\frac{c}{a} = -\frac{2-5m}{3m+1} \xrightarrow{m=4} x = -\frac{2-20}{12+1} = \frac{18}{13}$

$\Rightarrow m + \text{ریشه دیگر} = 4 + \frac{18}{13} = \frac{52+18}{13} = \frac{70}{13}$

تعداد ریشه‌های معادله درجه دوم

وضعیت تعداد ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با کمک Δ و به صورت زیر تعیین می‌شود:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
ریشه حقیقی ندارد.	یک ریشه مضاعف دارد.	دو ریشه حقیقی متمایز دارد.
	فرمول ریشه مضاعف: $x = \frac{-b}{2a}$	فرمول ریشه‌ها: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

! منظور از ریشه مضاعف، دو ریشه مساوی با همدیگر است.



تست: ریشه مضاعف معادله $x^2 - (2m+3)x + m^2 = 0$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\pm \frac{3}{4}$ (۴) صفر

پاسخ:

$$1 \cdot x^2 - \underbrace{(2m+3)}_b x + \underbrace{m^2}_c = 0 \xrightarrow[\Delta = b^2 - 4ac]{\Delta \text{ رو حساب کن}} \Delta = (2m+3)^2 - 4(1)(m^2)$$

$$\xrightarrow[\Delta=0]{\text{ریشه مضاعف دارد}} 12m+9=0 \xrightarrow{\text{حل معادله}} m = -\frac{3}{4}$$

$$\xrightarrow[\text{در معادله جای گذاری کن}]{\text{ریشه مضاعف رو پیدا کن}} x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{2a} = -\left(\frac{-\frac{3}{2}}{2(1)}\right) = \frac{3}{4}$$

تست: معادله $ax^2 + x + 3 = 0$

(۱) به ازای $a = \frac{1}{8}$ ، ریشه مضاعف دارد. (۲) به ازای $a = \frac{1}{12}$ ، دو ریشه حقیقی و متمایز دارد.

(۳) به ازای $a = \frac{1}{6}$ ، ریشه حقیقی ندارد. (۴) به ازای هر عدد منفی a ، دو ریشه حقیقی ندارد.

پاسخ:

Δ را محاسبه کرده و بعد گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$ax^2 + x + 3 = 0 \xrightarrow[\Delta = b^2 - 4ac]{a=a, b=1, c=3} \Delta = (1)^2 - 4(a)(3) = 1 - 12a$$

✗ ریشه حقیقی ندارد. $\Delta < 0 \rightarrow -\frac{1}{2} \rightarrow \Delta = 1 - 12\left(\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{2}$ در Δ بنذار $a = \frac{1}{8}$: گزینه « ۱ »

✗ ریشه مضاعف دارد. $\Delta = 0 \rightarrow 0 \rightarrow \Delta = 1 - 12\left(\frac{1}{12}\right) = 0$ در Δ بنذار $a = \frac{1}{12}$: گزینه « ۲ »

✓ ریشه حقیقی ندارد. $\Delta < 0 \rightarrow -1 \rightarrow \Delta = 1 - 12\left(\frac{1}{6}\right) = -1$ در Δ بنذار $a = \frac{1}{6}$: گزینه « ۳ »

درباره گزینه « ۴ »، اگر a عددی منفی باشد، $-12a$ مثبت شده و $-12a + 1$ هم قطعاً مثبت خواهد بود و بنابراین

همواره دو ریشه حقیقی خواهیم داشت. ✓

کنترل Δ در تست

یادتان باشد هر تست پارامتری از معادله درجه دو را که حل کردید و کارتان تمام شد، حتماً در مرحله آخر باید Δ را کنترل کنید.

۱- چنانچه تست گفته باشد، **معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز است**، پارامتر شما باید علاوه بر هر شرطی که یافته‌اید شرط $\Delta > 0$ را هم داشته باشند.

۲- چنانچه تست گفته باشد، **معادله دارای دو ریشه حقیقی است**، پارامتر شما باید علاوه بر هر شرطی که یافته‌اید، شرط $\Delta \geq 0$ را هم داشته باشند.

! راستی «حداکثر یک ریشه حقیقی»، یعنی $\Delta \leq 0$.

دور زدن Δ !

اگر در معادله درجه دومی a و c علامت‌های متفاوت داشته باشند، معادله درجه دوم، حتماً دارای دو ریشه حقیقی و متمایز است و در این حالت نیازی به محاسبه Δ نداریم...

اینم دلیلش: اگر a و c مختلف‌العلامت باشند، ac حتماً منفی است و در نتیجه $-4ac$ حتماً مثبت و از آنجا که b^2 همیشه مثبت است، در نتیجه جمع b^2 با $-4ac$ ، قطعاً مثبت خواهد شد...

تست: معادله $\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{x} = \frac{3}{5}$ چند ریشه دارد؟

۱) هیچ (۲) یک ریشه ساده (۳) یک ریشه مضاعف (۴) دو ریشه متمایز

پاسخ:

روش اول:

$$\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{x} = \frac{3}{5} \xrightarrow{x \neq 0} 1 - 4x = \frac{12x^2}{5} \xrightarrow{\times 5} 5 - 20x = 12x^2$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب کن}} 12x^2 + 20x - 5 = 0 \xrightarrow{a=12, c=-5} \Delta > 0 \Rightarrow \text{حتماً دو ریشه متمایز دارد.}$$



تست: معادله $\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{x} = \frac{3}{5}$ چند ریشه دارد؟

(۱) هیچ (۲) یک ریشه ساده (۳) یک ریشه مضاعف (۴) دو ریشه متمایز

روش دوم:

با فرض $\frac{1}{x} = t$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} \right)^2 - \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{3}{5} \xrightarrow{\frac{1}{x} = t} \frac{1}{4} t^2 - t - \frac{3}{5} = 0 \xrightarrow{a = \frac{1}{4}, c = -\frac{3}{5}} \Delta > 0 \xrightarrow{\text{تعداد ریشه ها}} 2 \text{ تا}$$

a, c مختلف علامت اند

دو جواب برای t درمی آید، آن ها را مساوی $\frac{1}{x}$ می گذارید و دو جواب برای x پیدا می کنید، البته حواسمان

هست که جواب معادله $t = 0$ نیست! چرا که $\frac{1}{x} = 0$ نمی شود!

ایستگاه ۲: تابع درجه دو و ویژگی های آن

سهمی

نمودار تابع درجه دوم بر حسب x ، سهمی شکل است. نمودار تابع درجه دوم یا همان سهمی، دو فرم کلی دارد:

۱- $y = ax^2 + bx + c$ که در آن a, b و c سه عدد حقیقی و معلوم اند و البته a هم صفر نیست.

۲- $y = a(x - h)^2 + k$ که در این فرم نوشتن هم a, h و k سه عدد حقیقی و معلوم اند و باز هم a نباید صفر باشد...



$y = a(x - h)^2 + k$	$y = ax^2 + bx + c$	
طول رأس: $x = h$ ، یعنی ریشه پُرانتز	طول رأس: $x = -\frac{b}{2a}$	
عرض رأس: $y = k$ ، یعنی همان عدد ثابت آخر معادله	عرض رأس: $y = -\frac{\Delta}{4a}$ همچنین می‌توانید با جای‌گذاری x در تابع، عرض رأس را پیدا کنید.	رأس سهمی
به جای x بگذارید صفر؛ همیشه یک نقطه تلاقی دارد. $x = 0 \Rightarrow y = ah^2 + k$	به جای x بگذارید صفر؛ همیشه یک نقطه تلاقی دارد. $x = 0 \Rightarrow y = c$	تلاقی با محور y
محور x ها را در ۲ نقطه قطع می‌کند.	محور x ها را در ۲ نقطه قطع می‌کند. (یعنی ریشه‌هایش...)	۱ $\Delta > 0$
بر محور x ها مماس است.	بر محور x ها مماس است.	۲ $\Delta = 0$
محور x ها را قطع نمی‌کند.	محور x ها را قطع نمی‌کند.	۳ $\Delta < 0$
سهمی رو به بالاست:	سهمی رو به بالاست:	
مینیم داریم.	مینیم داریم.	
سهمی رو به پایین است:	سهمی رو به پایین است:	
ماکسیم داریم.	ماکسیم داریم.	
$x = h$ (انگار x مساوی است با مقدار ریشه داخل پُرانتز!)	$x = -\frac{b}{2a}$ (انگار x مساوی است با مقدار ریشه مضاعف!)	محور تقارن (همواره یکی)
۱- مختصات کامل رأس سهمی ۲- ریشه‌های آن در صورت وجود ۳- نقطه تلاقی با محور y ها ۴- رو به بالا یا پایین بودن سهمی از روی نگاه به علامت a		
برای رسم سهمی نیاز است		





! وقتی سهمی به حالت $y = a(x-h)^2 + k$ داده شده است، برای رسم آن از انتقال $y = x^2$ هم می‌توانید استفاده کنید: h واحد به راست و k واحد هم به بالا...!

تست: کمترین مقدار عبارت $kx^2 - 8x + (6k-1)$ برابر با ۳ است. مختصات رأس سهمی $y = 2(x-k)^2 + k$ کدام است؟

- (۲, ۲) (۱) (۲, ۲) (۲) (۳, ۳) (۳) (۴, ۳) (-۳)

پاسخ:

عبارت درجه دوم ما کمترین مقدار را دارد، پس $a > 0$ بوده است که در اینجا می‌شود $k > 0$. خب منظور از کمترین مقدار سهمی هم عرض رأس آن است:

$$kx^2 - 8x + (6k-1) = 0 \xrightarrow[\Delta = b^2 - 4ac]{\Delta \text{ رو حساب کن}} \Delta = 64 - 4(k)(6k-1) \xrightarrow{\text{ساده کن}} \Delta = 64 - 24k^2 + 4k$$

$$\xrightarrow[\frac{-\Delta}{4a}]{\text{فرمول عرض رأس}} - \frac{64 - 24k^2 + 4k}{4k} = \boxed{3} \xrightarrow[\text{فرض تست}]{\text{طرفین وسطین کن}} 24k^2 - 4k - 64 = 12k$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} 24k^2 - 16k - 64 = 0 \xrightarrow{\div 8} 3k^2 - 2k - 8 = 0 \xrightarrow{\text{حل کن}} \Delta = 4 - 4(3)(-8) = 100$$

$$\Rightarrow k = \frac{2 \pm 10}{6} = 2, -\frac{8}{6} \quad k > 0 \rightarrow k = 2 \xrightarrow{\text{در سهمی دومی جای گذاری کن}} y = 2(x-2)^2 + 2$$

$$\xrightarrow{\text{مختصات رأس}} \begin{cases} \text{ریشه پранتز: } x = 2 \\ \text{عدد ثابت آخر: } y = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{نقطه}} (2, 2)$$

تست: رأس سهمی $y = (m-2)x^2 - (4m-2)x + 30$ دارای طول ۳ است. درباره این سهمی کدام گزینه درست است؟

- (۱) محور x ها را قطع نمی کند. (۲) شکل سهمی رو به پایین است.
(۳) بیشترین مقدار سهمی برابر ۳ است. (۴) سهمی از نقطه (۲, ۵) می گذرد.

پاسخ:

$$y = \underbrace{(m-2)}_a x^2 - \underbrace{(4m-2)}_b x + \underbrace{30}_c \xrightarrow{\text{طول رأس رو پیدا کن}} x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x = -\frac{-(4m-2)}{2(m-2)} = \frac{3}{\text{فرض تست}}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین کن}} 4m-2 = 6m-12 \xrightarrow{\text{حل معادله}} 2m = 10 \Rightarrow m = 5 \xrightarrow{\text{جای گذاری کن}} y = 3x^2 - 18x + 30$$

حالا گزینه ها را بررسی می کنیم:

$$y = 3x^2 - 18x + 30 \xrightarrow{\text{گزینه ها}} \begin{cases} \text{گزینه « ۱ »: } \Delta = (-18)^2 - 4(3)(30) = 324 - 360 = -36 \quad \checkmark \\ \text{گزینه « ۲ »: } a = 30 > 0 \rightarrow \text{سهمی رو به بالاست.} \quad \times \\ \text{گزینه « ۳ »: } x = 3 \xrightarrow{\text{در سهمی}} y = 3(3)^2 - 18(3) + 30 = 3 \\ \Rightarrow \text{کمترین مقدار سهمی، ۳ است؛ سهمی رو به بالاست. عرض رأس} = 3 \quad \times \\ \text{گزینه « ۴ »: } x = 2 \xrightarrow{\text{در سهمی}} y = 3(2)^2 - 18(2) + 30 = 6 \quad \times \end{cases}$$

! چنانچه سهمی از نقطه (m,n) بگذرد، مختصات این نقطه در معادله سهمی صدق می کند.

دقت: اگر سهمی از نقطه (m,n) بگذرد، ما در معادله سهمی به جای x ها می گذاریم m و به جای y هم می گذاریم n و یک رابطه درست به دست می آوریم...



تست: سهمی $y = ax^2 + bx + c$ دارای محور تقارنی به معادله $x = -2$ بوده و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۵ قطع می‌کند. اگر این سهمی از نقطه $(-1, -1)$ بگذرد، مقدار $a + b + c$ کدام است؟

۱۷ (۴)

۱۵ (۳)

۱۳ (۲)

۱۱ (۱)

پاسخ:

$$\text{۱ محور تقارن: } y = ax^2 + bx + c \xrightarrow[\substack{x = -\frac{b}{2a} \\ \text{فرض تست}}]{\text{محور تقارن}} x = -\frac{b}{2a} = \boxed{-2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین کن}} b = 4a$$

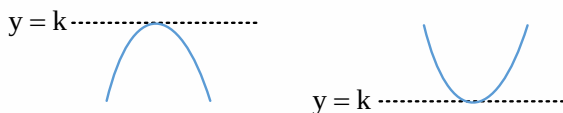
$$\text{۲ تلاقی با محور y ها: } y = 5 \xrightarrow{x=0} c = 5$$

$$\begin{aligned} \text{۳ گذشتن از نقطه } (-1, -1): & \xrightarrow[\substack{x=-1, y=-1 \\ \text{در سهمی}}]{\text{حل کن}} -1 = a(-1)^2 + b(-1) + c \xrightarrow{c=5} a - b = -6 \xrightarrow{\substack{b=4a \\ \text{طبق ۱}}} a - 4a = -6 \\ & \xrightarrow{a=2} a = 2 \xrightarrow{b=4a} b = 8 \xrightarrow{a+b+c} 2 + 8 + 5 = 15 \end{aligned}$$

مماس بودن سهمی بر خط

۱- اگر سهمی بر محور x ها مماس باشد، یعنی $\Delta = 0$ بوده است.

۲- اگر خط افقی با معادله $y = k$ بر سهمی مماس باشد، نتیجه می‌گیریم



عرض رأس سهمی مساوی k بوده است: $-\frac{\Delta}{4a} = k$

۳- اگر خط دلخواه $y = mx + n$ بر یک سهمی مماس شده بود، به جای y سهمی بگذارید: $mx + n$ و سپس معادله درجه دوم حاصل را مرتب کرده و در معادله آخری بگذارید $\Delta = 0 \dots$

تست: سهمی به معادله $y = -x^2 + (m-1)x + n$ بر محور x ها مماس بوده و محور تقارنش هم از نقطه

$(-2, 5)$ می‌گذرد. مقدار mn کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۱۲ (۳) -۱۲ (۴) -۶

پاسخ:

از محور تقارن سهمی، فقط x آن برای ما اهمیت دارد، پس گذشتن محور تقارن از نقطه $(-2, 5)$ ، یعنی:

$x = -2$ محور تقارن سهمی است:

$$1 \quad y = -x^2 + (m-1)x + n \xrightarrow[\substack{\text{معادله محور تقارن} \\ x = -\frac{b}{2a}}]{\text{فرض تست}} x = -\frac{m-1}{2(-1)} = \frac{m-1}{2} = -2$$

$$\xrightarrow[\text{حل معادله}]{\text{جای گذاری کن}} m-1 = -4 \Rightarrow m = -3 \rightarrow y = -x^2 - 4x + n$$

$$2 \quad y = -x^2 - 4x + n \xrightarrow[\Delta=0]{\text{بر محور } x \text{ ها مماس است.}} (-4)^2 - 4(-1)(n) = 0 \Rightarrow 16 + 4n = 0 \xrightarrow[\text{حل معادله}]{\text{حل معادله}} n = -4 \xrightarrow{m=-3} mn = 12$$

تست: به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ بر نیمساز ناحیه اول محورهای

مختصات مماس است؟ (خارج ۹۳)

- (۱) -۴ (۲) ۴ و -۱۲ (۳) -۴ و ۱۲ (۴) ۱۲

پاسخ:

$$y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6 \xrightarrow{y=x:} x = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$$

$$\xrightarrow[\text{ساده و مرتب کن}]{\text{ساده و مرتب کن}} x = 2x^2 + mx + x + m + 6 \Rightarrow 2x^2 + mx + m + 6 = 0$$

$$\xrightarrow[\text{مماس یعنی } \Delta=0]{\text{تجزیه کن}} m^2 - 4(2)(m+6) = 0 \xrightarrow[\text{ساده کن}]{\text{تجزیه کن}} m^2 - 8m - 48 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه کن}} (m+4)(m-12) = 0 \Rightarrow m = 12, -4$$

اگر $m = 12$ باشد، معادله حاصل از تلاقی سهمی و نیمساز عبارت است از:

$$2x^2 + mx + m + 6 = 0 \xrightarrow{m=12} 2x^2 + 12x + 18 = 0$$

که به وضوح جوابش $x = -3$ است و در ناحیه اول نیست! پس فقط $m = -4$ قبول خواهد بود.



وضعیت کامل یک سهمی نسبت به محور x ها

۱- اگر سهمی، محور x ها را در دو نقطه قطع کند، در این صورت $\Delta > 0$ بوده است.

۲- اگر سهمی، محور x ها را در دو نقطه قطع نکند، در این صورت: در حالت کلی، سهمی نسبت به محور x ها

یکی از چهار حالت زیر را دارد:

شرط	همواره بالای محور	بالای محور، مماس بر آن	همواره پایین محور	پایین محور، مماس بر آن
$\Delta < 0, a > 0$	$\Delta = 0, a > 0$	$\Delta < 0, a < 0$	$\Delta = 0, a < 0$	

! گاهی تست، به جای مماس بودن سهمی بر محور x ها از جمله مربع کامل شدن عبارت درجه دو استفاده

می کند که خب این دو جمله، به یک معنی اند...

تست: همه نقاط نمودار تابع $y = (m+1)x^2 + 2\sqrt{2}x + \frac{1}{4}$ بالای محور x ها است. چند جواب طبیعی و یک

رقمی برای m وجود دارد؟

۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار

پاسخ:

$$y = (m+1)x^2 + 2\sqrt{2}x + \frac{1}{4} \xrightarrow{\Delta \text{ رو حساب کن}} \Delta = (2\sqrt{2})^2 - 4(m+1)\left(\frac{1}{4}\right) \xrightarrow{\text{ساده کن}} \Delta = 7 - m$$

$$\xrightarrow{\text{سهمی بالای محور x ها است}} \begin{cases} 1 & \Delta < 0 \Rightarrow 7 - m < 0 \Rightarrow m > 7 \\ 2 & a > 0 \Rightarrow m + 1 > 0 \Rightarrow m > -1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} m > 7 \xrightarrow{m \text{ طبیعی و یک رقمی}} m = 8, 9 \xrightarrow{\text{تعداد}} \text{دو تا}$$

تست: هرگاه نمودار تابع $y = (k-2)x^2 - 3x + 2 + k$ پایین محور x ها و بر آن مماس باشد، در این صورت

چند جواب برای k وجود دارد؟

۱) هیچ (۲) یک (۳) دو (۴) بی شمار

پاسخ:

$$y = (k-2)x^2 - 3x + (2+k) \xrightarrow{\Delta \text{ رو حساب کن}} \Delta = (-3)^2 - 4(k-2)(k+2) \xrightarrow{\text{ساده کن}} \Delta = -4k^2 + 25$$

مزدوج $k^2 - 4$

$$\xrightarrow{\text{پایین محور x ها و مماس بر آن}} \begin{cases} 1 & \Delta = 0 \Rightarrow -4k^2 + 25 = 0 \Rightarrow k^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow k = \pm \frac{5}{2} \\ 2 & a < 0 \Rightarrow k - 2 < 0 \Rightarrow k < 2 \end{cases} \xrightarrow{\cap} k = -\frac{5}{2} \xrightarrow{\text{تعداد جواب}} \text{یکی}$$

عبارت درجه دوم با علامت ثابت یک تیر و دو نشان

نتیجه بسیار مهم و البته کنکوری جدول قبلی که درباره وضع سهمی و محور xها گفتیم، این است که اگر بگویند عبارت درجه دومی همواره مثبت یا همواره منفی بوده است، خوب انگار سهمی آن کاملاً بالا یا کاملاً پایین محور xها افتاده....!

این جوری هم ببین:

$ax^2 + bx + c \leq 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	$ax^2 + bx + c \geq 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	
$a < 0, \Delta \leq 0$	$a < 0, \Delta < 0$	$a > 0, \Delta \leq 0$	$a > 0, \Delta < 0$	شرط

تست: به ازای کدام مقادیر m عبارت $(m-1)x^2 + 6x + 5$ برای هر مقدار دلخواه x مثبت است؟

$$m > 1 \quad (1) \quad 1 < m < \frac{14}{5} \quad (2) \quad m > \frac{14}{5} \quad (3) \quad m \geq \frac{14}{5} \quad (4)$$

پاسخ:

$$(m-1)x^2 + 6x + 5 \xrightarrow{\Delta \text{ رو حساب کن}} \Delta = (6)^2 - 4(m-1)(5) \xrightarrow{\text{ساده کن}} \Delta = 56 - 20m$$

$$\xrightarrow{\text{عبارت همواره مثبت}} \text{سهمی بالای محور xها} \begin{cases} 1 \quad \Delta < 0 \Rightarrow 56 - 20m < 0 \Rightarrow m > \frac{14}{5} \\ 2 \quad a > 0 \Rightarrow m - 1 > 0 \Rightarrow m > 1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} m > \frac{14}{5}$$

ویژگی محور تقارن سهمی

۱- محور تقارن سهمی همیشه از رأس سهمی می‌گذرد.

دقت: طول رأس سهمی همیشه با مقدار داده شده برای محور تقارن سهمی مساوی است؛ **ببین:**

$$\boxed{x=4} \Rightarrow \text{طول رأس} = 4$$

معادله محور تقارن

۲- هر دو نقطه‌ای که روی سهمی بوده و عرض مساوی با هم داشته باشند، نسبت به محور تقارن سهمی قرینه‌اند. در این حالت برای پیدا کردن مقدار عددی محور تقارن، طول آن دو نقطه را میانگین بگیرید، **ببین:**

$$\boxed{A(-3, 4), B(5, 4)} \xrightarrow[\text{میانگین طولها}]{\text{معادله محور تقارن}} x = \frac{-3+5}{2} \xrightarrow{\text{ساده کن}} x = 1$$

دو نقطه با عرض مساوی روی سهمی



تست: دو نقطه $(-3, \beta)$ و $(1, \beta)$ روی نمودار سهمی با کمترین مقدار ۱ قرار دارند. اگر سهمی محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند، کدام نقطه روی این سهمی واقع است؟

- (۱) $(-3, 14)$ (۲) $(2, -2)$ (۳) $(3, -2)$ (۴) $(13, -3)$

پاسخ:

ابتدا معادله سهمی را در حالت کلی، $y = ax^2 + bx + c$ فرض کنیم:

۱ $(1, \beta), (-3, \beta)$ $\xrightarrow[\text{میانگین طولها رو بگیر}]{\text{معادله محور تقارن}} x = \frac{1+(-3)}{2} \xrightarrow[\text{ساده کن}]{\text{محور تقارن از رأس می‌گذرد}} x = -1 \xrightarrow{\text{رأس } x = -1}$

دو نقطه با عرض مساوی روی سهمی

۲ $y = ax^2 + bx + c \xrightarrow{\text{معادله محور تقارن}} x = -\frac{b}{2a} \xrightarrow[\text{طبق ۱}]{x = -1} -\frac{b}{2a} = -1 \xrightarrow{\text{ساده کن}} b = 2a$

۳ $\text{رأس } x = -1 \xrightarrow{\text{در سهمی بذار}} a(-1)^2 + b(-1) + c \xrightarrow[\text{طبق فرض}]{\text{مساوی ۱ بذار}} a - b + c = 1 \xrightarrow[\text{طبق ۱}]{b = 2a} -a + c = 1$

۴ $\text{سهمی محور } y \text{ها در ۳ قطع می‌کند} \xrightarrow[\text{طبق فرض}]{x=0, y=3} c = 3 \xrightarrow[\text{طبق ۳}]{-a+c=1} a = 2 \xrightarrow[\text{طبق ۲}]{b=2a} b = 4$

$\xrightarrow{\text{جای گذاری کن}} \text{معادله سهمی: } y = 2x^2 + 4x + 3 \xrightarrow[\text{گزینه ۳}]{\text{امتحان گزینه‌ها}} 3 = 2(-2)^2 + 4(-2) + 3 \checkmark$

تابع چاق و لاغر!

تابعی را که ضابطه‌اش به صورت یک عبارت درجه اول، ضربدر یک عبارت درجه دوم باشد تابع چاق و لاغر

می‌نامیم، مثل: $y = \underbrace{(2x-1)}_{\text{لاغر}} \underbrace{(x^2+5x-4)}_{\text{چاق}}$

۱- اگر تست بگویید: «تابع چاق و لاغر، محور x ها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند»، دلتای تابع درجه دوم را منفی کنید...

اینم دلیلش: آخه تابع درجه اول حتماً یک ریشه دارد که آن هم می‌شود نقطه برخورد با محور x ها، پس ریشه دیگری نباید داشته باشیم!

تست: منحنی $y = (x+2)(x^2 - 2x + m)$ محور x ها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟

- (۱) $0 < m < 1$ (۲) $m > -1$ (۳) $-2 < m < -1$ (۴) $m > 1$

پاسخ:

$$y = (x+2)(x^2 - 2x + m) \xrightarrow{\Delta \text{ چاق رو حساب کن}} \Delta = (-2)^2 - 4(1)(m) = 4 - 4m$$

$$\xrightarrow[\Delta < 0 \text{ چاق}]{\text{تابع فقط یک ریشه دارد}} \xrightarrow{\text{حل کن}} 4 - 4m < 0 \rightarrow m > 1$$

۲- اگر تست بگویید: «تابع چاق و لاغر بر محور x ها مماس است»، در این صورت یکی از دو حالت زیر برقرار است:

(الف) دلتای تابع درجه دوم صفر بوده است.

(ب) ریشه تابع درجه اول (همون لاغره) در عبارت درجه دوم صدق می‌کند.

تست: منحنی $y = \left(\frac{1}{3}x - k\right)(x^2 + 2x - 3)$ بر محور x ها مماس است. در این صورت تفاضل مقادیر k کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ:

همان‌طور که می‌بینید در قسمت چاق، Δ نمی‌تواند صفر شود:

$$x^2 + 2x - 3 \xrightarrow{\Delta \text{ رو حساب کن}} \Delta = 2^2 - 4(1)(-3) = 16$$

پس می‌ماند یک راه! ریشه قسمت لاغر باید در تابع چاق صدق کند تا کل تابع بر محور x ها مماس شود:

$$\frac{1}{3}x - k = 0 \xrightarrow{\text{ریشه حساب کن}} \frac{1}{3}x = k \Rightarrow x = 3k \xrightarrow[\text{بخار توی تابع درجه دوم}]{x^2 + 2x - 3 = 0} (3k)^2 + 2(3k) - 3 = 0$$

$$\xrightarrow[\text{ساده کن}]{\text{جمع ضرایب اول و سوم با دومی برابر است}} 9k^2 + 6k - 3 = 0 \rightarrow k = -1, k = \frac{3}{9} \xrightarrow{\text{تفاضل ریشه‌ها}} \left(\frac{1}{3}\right) - (-1) = \frac{4}{3}$$



ایستگاه ۳: روابط بین ریشه‌های معادله درجه دو

روابط بین ریشه‌های معادله درجه دو: S و P

در معادله درجه دو $ax^2 + bx + c$ ، با فرض $\Delta > 0$ و وجود دو ریشه به نام‌های α و β ، داریم:

نماد	بر حسب ریشه‌ها	بر حسب ضرایب‌ها
S	$\alpha + \beta$	$-\frac{b}{a}$
P	$\alpha\beta$	$\frac{c}{a}$
جمع دو ریشه		
ضریب دو ریشه		

تست: عدد $\frac{5}{3}$ یکی از ریشه‌های معادله $mx^2 - 6x - 4m - 1 = 0$ است. ضرب ریشه‌های این معادله کدام

است؟

(۱) $-\frac{35}{9}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{35}{9}$ (۴) $-\frac{2}{3}$

پاسخ:

$$x = \frac{5}{3} \xrightarrow{\text{بذار توی معادله}} m \left(\frac{5}{3} \right)^2 - 6 \left(\frac{5}{3} \right) - 4m - 1 = 0 \xrightarrow{\times 9} 25m - 90 - 36m - 9 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه در معادله صدق می‌کند}} -11m - 99 = 0 \Rightarrow m = -9 \xrightarrow{\text{بذار توی معادله}} -9x^2 - 6x + 35 = 0 \xrightarrow{\text{ضرب ریشه‌ها}} P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{35}{-9}$$

حل کن

رابطه‌ای بین ریشه‌ها در تست حضور دارد...

هر تستی که در آن رابطه‌ای مشخص بین دو تا ریشه معادله درجه دو داده شده باشد، حتماً با روش S و P

حل می‌شود؛ برای این منظور بنویسید:

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} \quad \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad 1-$$

۳- رابطه‌ای را که تست بین دو ریشه داده است! مثلاً گفته باشد: $\alpha = \beta^2$ (یا به زبان فارسی بگویند که یکی

از ریشه‌ها مجذور دیگری بوده است...!)

حالا با کمک سه رابطه بالا و جای‌گذاری، پارامتر موجود در تست را پیدا کنید...

تست: در معادله $x^2 - 8x + m = 0$ یکی از ریشه ها از نصف ریشه دیگر ۵ واحد بیشتر است. مقدار m کدام

است؟ (خارج ۹۳)

پاسخ:

۱۰ (۱)

۱۲ (۲)

۱۴ (۳)

۱۵ (۴)

$$x^2 - 8x + m = 0 \Rightarrow \begin{cases} ۱ \quad \alpha + \beta = -\left(\frac{-8}{1}\right) = 8 \\ ۲ \quad \alpha\beta = \frac{m}{1} = m \end{cases}$$

$$\begin{aligned} ۳ \quad \Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{2} + 5 & \xrightarrow{\text{بذار توی ۱}} \left(\frac{\beta}{2} + 5\right) + \beta = 8 \xrightarrow{\text{ساده کن}} \frac{\beta}{2} + \beta = 3 \\ \xrightarrow{\times 2} \beta + 2\beta = 6 \Rightarrow 3\beta = 6 \Rightarrow \beta = 2 & \xrightarrow{\text{بذار توی ۱}} \alpha + 2 = 8 \Rightarrow \alpha = 6 \xrightarrow{\text{بذار توی ۲}} 6 \times 2 = m \Rightarrow m = ۱۲ \end{aligned}$$

کنترل Δ

در تستی که با S و P حل کرده‌اید و برای پارامتر موجود در سؤال، دو مقدار به دست آورده‌اید، یادتان باشد برای هر کدام کنترل کنید که Δ مثبت می‌شود یا منفی؟! چنانچه به ازای پارامتری، $\Delta < 0$ شود آن مقدار پارامتر، قابل قبول نیست!

دقت: خود S و P به تنهایی، لزوماً وجود ریشه را برای معادله درجه دوم تضمین نمی‌کنند، حتماً چک Δ لازم است...

! راستی یادتان هست که اگر a و c مختلف‌العلامت باشند، حتماً معادله درجه دوم ما دو ریشه حقیقی دارد

! و! خوب حالا این‌طوری هم بدانید که کنترل Δ همیشه لازم است، مگر $\frac{c}{a} < 0$ شود...



تست: به ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 + 3x + m^2 = 2$ معکوس یکدیگرند؟ (خارج ۹۰)

۲ (۴

۱ (۳

-۱ (۲

-۲ (۱

پاسخ:

$$mx^2 + 3x + m^2 = 2 \xrightarrow{\text{همه رو به سمت چپ}} mx^2 + 3x + (m^2 - 2) = 0 \xrightarrow{P, S \text{ رو تشکیل بده}} \begin{cases} 1 & \alpha + \beta = -\frac{3}{m} \\ 2 & \alpha\beta = \frac{m^2 - 2}{m} \end{cases}$$

$$\frac{\alpha = \frac{1}{\beta}}{\text{طبق فرض}} \rightarrow \alpha\beta = 1 \xrightarrow{\text{در ۲ بنذار}} 1 = \frac{m^2 - 2}{m} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین کن}} m^2 - 2 = m \xrightarrow{\text{مرتب کن}} m^2 - m - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حل کن}} \text{در معادله جای گذاری کن} \rightarrow m = -1, m = 2 \rightarrow \begin{cases} m = -1 \rightarrow -x^2 + 3x - 1 = 0 \\ m = 2 \rightarrow 2x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\Delta \text{ کنترل}} \begin{cases} \Delta = 9 - 4(-1)(-1) = 5 \text{ ق ق} \\ \Delta = 9 - 4(2)(2) = -7 \text{ غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow m = -1$$

دو رابطه معروف بین ریشه‌ها

۱- اگر تست گفت یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم، K برابر ریشه دیگر است، غیر از روش کلی که در

قسمت قبل گفتیم، می‌توانید سریع قرار دهید: $\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$ و پارامتر را پیدا کنید.

۲- اگر تست گفت یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم، k واحد از دیگری بیشتر است، باز هم علاوه بر روش

اصلی می‌توانید این را حفظ کنید که: $\Delta = k^2 a^2$

! اگر یکی از ریشه‌ها k واحد از اون یکی کمتر باشه، باز هم رابطه (۲) درسته و هیچ فرقی نمی‌کنه!

تست: در معادله درجه دوم $2x^2 + mx + 9 = 0$ یک ریشه دو برابر ریشه دیگر است. مجموع دو ریشه مثبت

کدام است؟

۵ (۴)

۴/۵ (۳)

۴ (۲)

۳۵ (۱)

پاسخ:

$$2x^2 + mx + 9 = 0 \xrightarrow[k=2]{\text{یک ریشه } k \text{ برابر دیگری}} \frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k} \Rightarrow \frac{m^2}{2 \times 9} = \frac{(2+1)^2}{2} \Rightarrow \frac{m^2}{18} = \frac{9}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{حل کن}} m^2 = 81 \Rightarrow m = \pm 9 \Rightarrow m = -9 \xrightarrow{\text{جای گذاری کن}} 2x^2 - 9x + 9 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ریشه ها}} S = -\frac{b}{a} = -\left(\frac{-9}{2}\right) = 4.5$$

توجه دارید که به ازای $m = 9$ ، جمع ریشه ها می شود $-4/5$ و چون ضرب آن ها هم مثبت می شود، در این حالت هر دو ریشه منفی بوده اند که قابل قبول تست نیست.

تست: یکی از ریشه های معادله $x^2 - (m+3)x + 3m = 0$ از دیگری ۵ واحد بیشتر است. حاصل ضرب

ریشه های مثبت معادله کدام است؟

۱۸ (۴)

۲۱ (۳)

۲۴ (۲)

۱۲ (۱)

پاسخ:

$$\alpha = 5 + \beta \xrightarrow[\Delta = k^2 a^2]{k=5} (m+3)^2 - 4(-1)(3m) = \frac{(5)^2 (1)^2}{k^2 a^2} \xrightarrow{\text{اتحاد و ساده کن}} m^2 - 6m + 9 = 25$$

Δ معادله درجه دوم

$$\Rightarrow m^2 - 6m - 16 = 0 \xrightarrow{\text{حل کن}} m = 8, -2$$

چون حاصل ضرب ریشه های مثبت خواسته شده، پس حتماً باید ضرب ریشه ها مثبت باشد، یعنی $m = 8$ قبوله:

$$m = 8 \xrightarrow{\text{جای گذاری}} x^2 - 11x + 24 = 0 \xrightarrow{\text{ضرب ریشه ها}} \frac{c}{a} = 24$$

خودتان امتحان کنید که به ازای $m = -2$ ، ضرب ریشه ها منفی می شود...



محاسبه رابطه‌های معروف بین ریشه‌ها، بر حسب P و S

در این مدل از تست‌ها، یک معادله درجه دو دارید که خب پارامتر هم ندارد و قرار است عبارتی را که بر حسب ریشه‌ها داده شده است، حساب کنید. مثل مجموع مکعبات ریشه‌ها یا هر چیز دیگری! طبق جدول زیر موارد مهم را به خاطر بسپارید:

مدل اول) معروف‌ها:

به فارسی	بر حسب ریشه‌ها	حاصل عبارت خواسته شده بر حسب P و S
۱ مجموع مربعات ریشه‌ها	$\alpha^2 + \beta^2$	$S^2 - 2P$
۲ مجموع مکعبات ریشه‌ها	$\alpha^3 + \beta^3$	$S^3 - 3SP$
۳ قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها	$ \alpha - \beta $	$\sqrt{S^2 - 4P}$ یا $\frac{\sqrt{\Delta}}{ a }$
۴ مجموع جذرهای ریشه‌های مثبت	$\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}$	$\sqrt{S \pm 2\sqrt{P}}$

اینم دلیلش:

۱ $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P$

۲ $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = S^3 - 3SP$

واسه اثبات حالت‌های ۳ و ۴ عبارت‌ها را مساوی k گرفته و به توان ۲ برسانید و بعد حسابشون کنید،

بین:

۴ $k = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \xrightarrow{\text{توان ۲}} k^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = S + 2\sqrt{P} \xrightarrow[k>0]{\text{جذر بگیر}} k = \sqrt{S + 2\sqrt{P}} \xrightarrow[\alpha, \beta > 0]{\text{نتیجه}}$

تست: در معادله $x^2 - 8x + 4 = 0$ ریشه‌ها را α و β نامیده‌ایم. حاصل تقسیم $\alpha^2 + \beta^2$ به $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ چقدر

است؟

- (۱) $\frac{56\sqrt{3}}{3}$ (۲) $28\sqrt{3}$ (۳) $\frac{28\sqrt{3}}{3}$ (۴) $56\sqrt{3}$

پاسخ:

$$x^2 - 8x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} \rightarrow S = \alpha + \beta = 8 \\ \frac{c}{a} \rightarrow P = \alpha\beta = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 8^2 - 2(4) = 56 \\ \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}} = \sqrt{8 + 2\sqrt{4}} = \sqrt{8 + 4} = \sqrt{12} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} = \frac{56}{\sqrt{12}} = \frac{56}{2\sqrt{3}} \xrightarrow{\text{گویا کردن}} \frac{56 \times \sqrt{3}}{2 \times \sqrt{3}} = \frac{28\sqrt{3}}{1} = 28\sqrt{3}$$

تست: در معادله $x^2 + 3x - 1 = 0$ حاصل $\alpha^3 + \beta^3$ کدام است؟

- (۱) ۳۶ (۲) -۳۶ (۳) ۲۷ (۴) -۲۷

پاسخ:

$$x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} \rightarrow S = -3 \\ \frac{c}{a} \rightarrow P = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{فرمول}} \alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3SP = (-3)^3 - 3(-3)(-1) = -27 - 9 = -36$$

عبارت‌های غیرمعروف بر حسب S و P

مدل دوم) اگر حاصل عبارتی را بر حسب ریشه‌ها خواستند که جزء جدول مدل اول نبود، ابتدا با عملیات

جبری نظیر مخرج مشترک‌گیری، فاکتورگیری و اتحاد آن را ساده می‌کنیم؛ با این هدف که در آن‌ها فقط $\alpha\beta$

و $\alpha + \beta$ دیده شود یا عبارت‌های معروفی که در جدول گفتیم، بعدش عبارت را بر حسب S و P نوشته و

حاصل آن را از روی معادله پیدا می‌کنیم...



تست: اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $4x^2 - 12x + 1 = 0$ باشند، حاصل $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

پاسخ:

$$\begin{aligned}
 & 1 \quad \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک گیر}} \frac{\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}} \xrightarrow[\text{مخرج جذر P است}]{\text{صورت جزء جدول است}} \frac{\sqrt{S+2\sqrt{P}}}{\sqrt{P}} \\
 & 2 \quad 4x^2 - 12x + 1 = 0 \quad \begin{cases} \xrightarrow{-\frac{b}{a}} S = -\left(\frac{-12}{4}\right) = 3 \\ \xrightarrow{\frac{c}{a}} P = \frac{1}{4} \end{cases} \xrightarrow{\text{جای گذاری در ۱}} \frac{\sqrt{S+2\sqrt{P}}}{\sqrt{P}} = \frac{\sqrt{3+2\sqrt{\frac{1}{4}}}}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt{3+2\left(\frac{1}{2}\right)}}{\frac{1}{2}} \\
 & = \frac{\sqrt{3+1}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4
 \end{aligned}$$

تست: در معادله $2x^2 + 7x - 20 = 0$ با ریشه‌های α و β ، حاصل $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$ کدام است؟

- (۱) -۳۵ (۲) ۴۵ (۳) ۳۵ (۴) -۴۵

پاسخ:

$$\begin{aligned}
 & 1 \quad 2x^2 + 7x - 20 = 0 \quad \begin{cases} \xrightarrow{-\frac{b}{a}} S = -\frac{7}{2} \\ \xrightarrow{\frac{c}{a}} P = -\frac{20}{2} = -10 \end{cases} \\
 & 2 \quad \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 \xrightarrow{\text{از } \alpha\beta \text{ فاکتور بگیر}} \alpha\beta(\alpha + \beta) \xrightarrow{\text{بر حسب S و P بنویس}} PS \xrightarrow[\text{طبق ۱}]{\text{جای گذاری کن}} (-10) \times \left(-\frac{7}{2}\right) = 35
 \end{aligned}$$

بحث درباره علامت ریشه‌ها فقط با کمک S و P

اگر در معادله درجه دومی $\Delta > 0$ باشد و در واقع معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد، می‌توانید بدون آن‌که معادله را حل کرده و ریشه‌هایش را پیدا کنید، فقط با کمک علامت S و P درباره علامت ریشه‌ها اظهار نظر کنید.



دقت: یادت باشه علامت ریشه‌ها رو خواست، به یاد علامت S و P بیفتی...

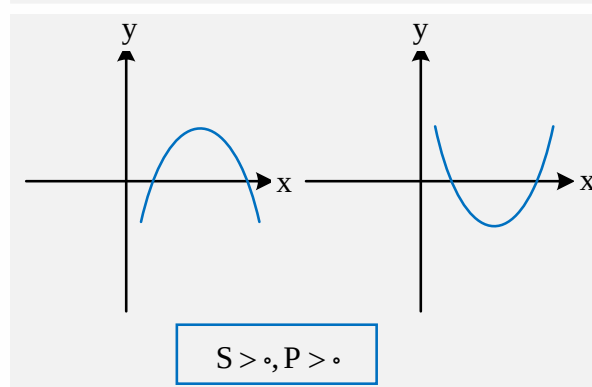
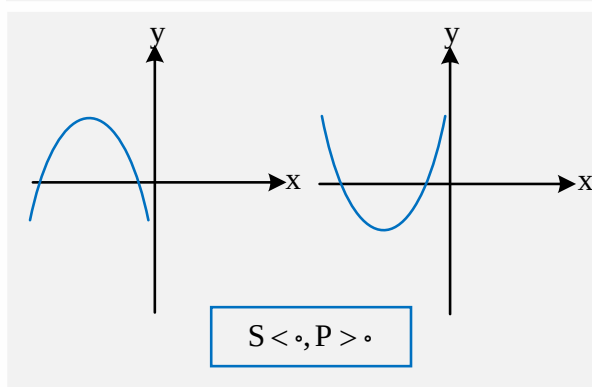
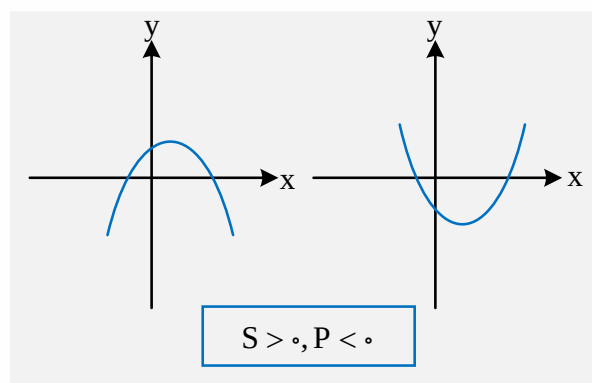
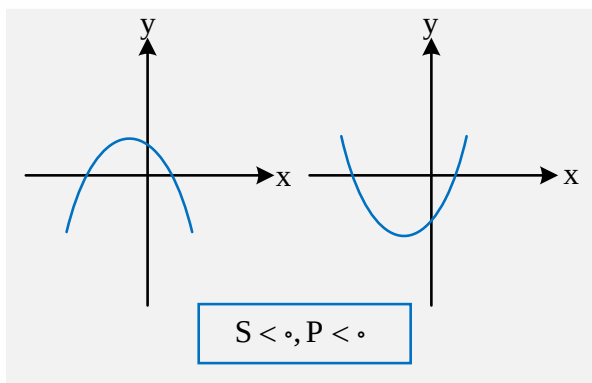
$\Delta > 0$	P مثبت است:	P منفی است:
S مثبت است:	هر دو ریشه مثبت هستند.	دو ریشه با علامت متفاوت دارد و عدد ریشه مثبت، بزرگ‌تر است؛ مثل ۴ و -۲.
S منفی است:	هر دو ریشه منفی هستند.	دو ریشه با علامت متفاوت دارد و عدد ریشه منفی، بزرگ‌تر است؛ مثل -۵ و ۲.

! اگر $S = 0$ باشد، یعنی معادله دو ریشه قرینه دارد؛ مثل ۳ و -۳. در این حالت حتماً P منفی است.

! اگر $P = 0$ باشد، یعنی معادله حتماً یک ریشه صفر دارد.

دقت: چهار حالتی را که در جدول بالا آوردیم، به صورت نموداری هم ببینید؛ برای $bx + c$ و $y = ax^2 + bx + c$

با فرض $\Delta > 0$ ، داریم:





تست: کدامیک از معادله‌های زیر دارای دو ریشه مثبت است؟

(۱) $x^2 - 4x - 2 = 0$ (۲) $x^2 - 2x + 4 = 0$ (۳) $x^2 + 8x + 1 = 0$ (۴) $x^2 - 4x + 2 = 0$

پاسخ:

بررسی گزینه‌ها:

× علامت ریشه‌ها مختلف است. $\Rightarrow P = -2 \Rightarrow \frac{c}{a} \rightarrow P = -2$ $x^2 - 4x - 2 = 0$: گزینه « ۱ »

× اصلاً ریشه ندارد. $\Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4(1)(4) = 4 - 16 = -12 < 0 \Rightarrow$ $x^2 - 2x + 4 = 0$: گزینه « ۲ »

× هر دو ریشه منفی‌اند. $\Rightarrow S = -8 \Rightarrow \frac{b}{a} \rightarrow S = -8$ ریشه‌ها هم‌علامت‌اند. $\Rightarrow P = 1 \Rightarrow \frac{a}{c} \rightarrow P = 1$ $x^2 + 8x + 1 = 0$: گزینه « ۳ »

اما در گزینه « ۴ »، $P = 2$ و $S = 4$ است که یعنی وجود دو ریشه مثبت؛ در ضمن Δ آن هم مثبت است....

تست: منحنی نمایش تابع $y = x^2 + (m-2)x + (5-m)$ محور xها را در دو نقطه با طول‌های منفی متمایز

قطع می‌کند، در این صورت چند جواب طبیعی برای m وجود دارد؟

(۱) هیچ (۲) یک (۳) دو (۴) سه

پاسخ:

قطع کردن محور xها مفهوم وجود ریشه‌ها را دارد و هر دو ریشه طول منفی دارند، یعنی دو ریشه حقیقی

منفی دارد. پس:

$$y = x^2 + (m-2)x + (5-m) \begin{cases} \frac{b}{a} \rightarrow S = -(m-2) = -m+2 \\ \frac{c}{a} \rightarrow P = 5-m \end{cases} \xrightarrow{\substack{\text{دو ریشه منفی دارد} \\ P>0, S<0}} \begin{cases} -m+2 < 0 \\ 5-m > 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{حل کن}} \begin{cases} m > 2 \\ m < 5 \end{cases} \xrightarrow{\cap} 2 < m < 5 \xrightarrow{m \in \mathbb{N}} m = 3, 4$$

$$\xrightarrow{\Delta \text{ کنترل}} \begin{cases} m=3 \xrightarrow{\text{جای گذاری کن}} x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = -7 \quad \times \\ m=4 \xrightarrow{\text{جای گذاری کن}} x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \quad \times \end{cases}$$

× در یک نقطه، مماس بر محور xهاست.

پس هیچ مقدار طبیعی و قابل قبول برای m وجود ندارد.

ایستگاه ۴: تشکیل معادله درجه دو

نوشتن معادله درجه دوم با داشتن S و P آن

اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم را داشته باشید که آن‌ها را به ترتیب S و P می‌نامیم،

آن وقت معادله درجه دوم مورد نظر می‌شود: $x^2 - Sx + P = 0$

اینم دلیلش: $ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{\div a} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$

این جوری هم ببین: اگر دو تا عدد حقیقی α و β را بخواهید به طوری که جمع آن‌ها مساوی عدد معلوم S

و ضربشان هم P داده شده باشد، برای پیدا کردن این دو عدد باید معادله $x^2 - Sx + P = 0$ را حل کنید...

تست: ریشه‌های کدام معادله زیر، $2 + \sqrt{4-a}$ و $2 - \sqrt{4-a}$ هستند؟

$$(1) \quad x^2 - 4x - a = 0$$

$$(2) \quad x^2 + ax + 4 = 0$$

$$(3) \quad x^2 - 4x + a = 0$$

$$(4) \quad x^2 + ax - 4 = 0$$

پاسخ:

$$\begin{aligned} \alpha = 2 + \sqrt{4-a}, \beta = 2 - \sqrt{4-a} & \begin{cases} \text{جمع کن} \rightarrow S = (2 + \sqrt{4-a}) + (2 - \sqrt{4-a}) = 4 \\ \text{ضرب کن} \rightarrow P = (2 + \sqrt{4-a}) \times (2 - \sqrt{4-a}) \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} P = 4 - (4-a) = a \end{cases} \end{aligned}$$

پس معادله درجه دوم مورد نظر می‌شود:

$$x^2 - Sx + P = 0 \xrightarrow[S=a]{S=4} x^2 - 4x + a = 0$$

تست: اگر $y + x = 2$ و $xy = \frac{1}{2}$ باشد، در این صورت حاصل $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$ کدام است؟

(۴) ۱۲

(۳) ۸

(۲) ۶

(۱) ۱۰

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک بگیر}} \frac{y^2 + x^2}{x^2 y^2} \xrightarrow{xy=P} \frac{x+y=S}{P^2} \xrightarrow{S=2, P=\frac{1}{2}} \frac{S^2 - 2P}{P^2} = \frac{4 - 2\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{\frac{1}{4}} = 12$$

پاسخ:



نوشتن معادله درجه دوم با کمک معادله‌ای دیگر؛ دو معادله درجه ۲ در یک تست!

در این مدل تست‌ها، دوتا معادله درجه دوم بهتون میدن! ریشه‌های معادله اولی α و β فرض می‌شوند و ریشه‌های معادله دوم هم بر حسب α و β داده می‌شوند؛ خب شما S و P معادله اول را حساب می‌کنید، بعدش جمع و ضرب ریشه‌های دومی را تشکیل می‌دهید و S' و P' می‌نامید. حالا باید S' و P' را با ساده کردن و عملیات جبری بر حسب S و P ساخته و حساب کنید، خب حالا S' و P' هم معلوم شده، دیگه برو واسه خودت!

تست: اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x = 1$ باشند، به ازای کدام مقدار k ، مجموعه جواب‌های معادله

$$8x^2 + kx - 1 = 0 \text{ به صورت } \{\alpha^2\beta, \alpha\beta^2\} \text{ است؟ (خارج ۹۰)}$$

۹ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

پاسخ:

$$\begin{aligned} 1 \quad 2x^2 - 3x = 1 &\xrightarrow{\text{مرتب کن}} 2x^2 - 3x - 1 = 0 \begin{cases} -\frac{b}{a} \rightarrow S = \frac{3}{2} = \alpha + \beta \\ \frac{c}{a} \rightarrow P = -\frac{1}{2} = \alpha\beta \end{cases} \\ 2 \quad 8x^2 + kx - 1 = 0 &\begin{cases} -\frac{b}{a} \rightarrow S' = -\frac{k}{8} = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 \\ \frac{c}{a} \rightarrow P' = -\frac{1}{8} = (\alpha^2\beta)(\alpha\beta^2) \end{cases} \end{aligned}$$

حالا ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 &\xrightarrow{\text{فاکتور بگیر}} \alpha\beta(\alpha + \beta) \xrightarrow{\text{بر حسب } P \text{ و } S \text{ جای گذاری کن}} PS \xrightarrow{1 \text{ طبق}} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4} \\ -\frac{k}{8} = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 &\xrightarrow{2 \text{ طبق}} -\frac{k}{8} = -\frac{3}{4} \xrightarrow{\times(-8)} k = 6 \end{aligned}$$

تست: اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x - 1 = 0$ و همچنین جواب‌های معادله $kx^2 - 13x + 2t = 0$

به صورت $\frac{\beta}{\alpha}$ و $\frac{\alpha}{\beta}$ باشند، در این صورت مقدار $t + k$ کدام است؟

۳ (۴)

-۳ (۳)

-۲ (۲)

۲ (۱)

پاسخ:

۱ $2x^2 - 3x - 1 = 0$

$$\begin{cases} -\frac{b}{a} \rightarrow S = \frac{3}{2} \\ \frac{c}{a} \rightarrow P = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

۲ معادله دوم:

$$\begin{cases} S' = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک بگیر}} S' = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{S^2 - 2P}{P} \xrightarrow{S = \frac{3}{2}, P = -\frac{1}{2}} S' = \frac{\frac{9}{4} + 1}{-\frac{1}{2}} \Rightarrow S' = -\frac{13}{2} \\ P' = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\beta}{\alpha} = 1 \end{cases}$$

خب حالا جمع و ضرب ریشه‌های معادله دوم را پیدا کنید و مساوی این‌ها بگذارید:

$$\begin{cases} -\frac{b}{a} \rightarrow S' = \frac{13}{k} \xrightarrow{S' = -\frac{13}{2}} \frac{13}{k} = \frac{-13}{2} \Rightarrow k = -2 \\ \frac{c}{a} \rightarrow P' = \frac{2t}{k} \xrightarrow{P' = 1} \frac{2t}{k} = 1 \xrightarrow{k = -2} t = -1 \end{cases}$$

پس: $k + t = -3$

■ گاهی تست، ریشه‌های معادله اولی را به زبان ریاضی برایتان α و β اعلام نمی‌کند! بلکه رابطه بین ریشه‌های معادله دومی و معادله اول را به صورت فارسی به شما می‌دهد، باز هم مراحل شما فرقی با قبل ندارد. ریشه‌های اولی را α و β بگیرید و از روی جملات فارسی داده شده، ریشه‌های دومی را بر حسب α و β بنویسید و بعد هم دقیقاً مثل قبل عمل کنید....



تست: ریشه‌های کدام معادله از معکوس ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ، یک واحد کمترند؟

(کنکور ۹۴)

$$x^2 + 3x + 1 = 0 \quad (۲)$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \quad (۱)$$

$$x^2 + 5x + 2 = 0 \quad (۴)$$

$$x^2 - 5x + 2 = 0 \quad (۳)$$

پاسخ:

$$۱ \quad 2x^2 - 3x - 1 = 0 \quad \begin{cases} -\frac{b}{a} \rightarrow S = \frac{3}{2} \\ \frac{c}{a} \rightarrow P = -\frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{فرم ریشه‌های دومی رو بنویس}} \underbrace{\frac{1}{\alpha} - 1, \frac{1}{\beta} - 1}_{\text{از معکوس، یک واحد کمتر}}$$

$$۲ \quad \text{معادله دوم:} \quad \begin{cases} S' = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) + \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - 2 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} - 2 \Rightarrow S' = \frac{S}{P} - 2 \\ P' = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \times \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) = \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + 1 = \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 1 = \frac{1}{P} - \frac{S}{P} + 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{عددهای ۱ رو جای گذاری کن}} \begin{cases} S' = \frac{S}{P} - 2 = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} - 2 = -5 \\ P' = \frac{1}{P} - \frac{S}{P} + 1 = \frac{1}{-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} + 1 = -2 + 3 + 1 = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{معادله دوم رو بنویس}} \frac{x^2 - S'x - P' = 0}{x^2 - 5x + 2 = 0}$$

ایستگاه ۵: کاربردهای معادله درجه دو

معادلاتی که با تغییر متغیر به یک معادله درجه دو تبدیل می‌شود

در بعضی معادله‌ها، که خب نه درجه اول هستند و نه درجه دوم، عبارتی را می‌بینیم که یک‌بار با توان ۱ و یک‌بار هم با توان ۲ حضور دارد. در این حالت کافی است اسم آن عبارت را متغیر جدیدی مثل t ، بگیریم تا عبارت درجه دومی بر حسب t دربیاید و بعد هم آن را حل کنیم. در آخر که مقدار t درآمد، آن را مساوی عبارت خودش گذاشته و دوباره معادله دیگری را حل می‌کنیم تا x به دست بیاید.

تست: معادله $\left(\frac{2x-1}{2x}\right)^2 - 4\left(\frac{2x-1}{2x}\right) + 3 = 0$ چند ریشه دارد؟

(۱) هیچ (۲) یک (۳) دو (۴) سه

پاسخ:

عبارت $\frac{2x-1}{2x}$ را با توان ۱ و ۲ می بینیم، پس قرار می دهیم $\frac{2x-1}{2x} = t$ و در نتیجه خواهیم داشت:

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر است ریشه ها رو پیدا کن}} t = 1, t = 3$$

$$\xrightarrow{\text{جواب های بالا را مساوی عبارت اولیه t بذار}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{2x-1}{2x} = 1 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین کن}} 2x-1=2x \Rightarrow -1=0 \text{ امکان ندارد.} \\ \frac{2x-1}{2x} = 3 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین کن}} 2x-1=6x \xrightarrow{\text{حل کن}} 4x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{4} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تعداد ریشه ها}} \text{یکی}$$

تست: مجموع ریشه های حقیقی معادله $(x^2+x)^2 - 18(x^2+x) + 72 = 0$ کدام است؟ (کنکور ۹۰)

(۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۴

پاسخ:

$$x^2 + x = t \xrightarrow{\text{بذار در معادله}} t^2 - 18t + 72 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه کن}} (t-12)(t-6) = 0 \xrightarrow{\text{ریشه ها رو پیدا کن}} t = 12, t = 6$$

$$\xrightarrow{\text{برابر مقدار اولیه t بذار}} \left\{ \begin{array}{l} x^2 + x = 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \xrightarrow{\text{حل کن}} (x+4)(x-3) = 0 \\ x^2 + x = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \xrightarrow{\text{ریشه ها رو پیدا کن}} (x-2)(x+3) = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{جمع ریشه ها}} x = -4, +3, +2, -3 \xrightarrow{-2}$$

■ معادلاتی که در زیر لیست می کنیم، با روش تغییر متغیر حل می شوند و البته معروف ترند! خوب است چشمتان به آن ها آشنا باشد:

۱- معادله $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ با تغییر متغیر $x^n = t$. به خصوص معادله های $ax^4 + bx^2 + c = 0$ و $ax^6 + bx^3 + c = 0$

۲- معادله $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ با تغییر متغیر $\sqrt{x} = t$.

! عبارتی را که t می گیریم، گاهی خودش شرط به خصوصی دارد که خب مجبوریم وقتی مقدار t درآمد، حتماً

آن را لحاظ کنیم. به خصوص در مواردی که t را عبارتی مثبت مثل x^2 یا $\sqrt{x}$ گرفته اید، حتماً دقت کنید که جواب منفی به دست آمده برای t قبول نیست!



تست: معادله $x^4 - 2\sqrt{3}x^2 - 6 = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- (۱) هیچ (۲) دو (۳) چهار (۴) یک
- پاسخ:

$$x^2 - t \xrightarrow{\text{در معادله بذار}} t^2 - 2\sqrt{3}t - 6 = 0 \xrightarrow{\Delta \text{ رو پیدا کن}} \Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4(1)(-6) = 36$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه ها رو پیدا کن}} t = \frac{2\sqrt{3} \pm 6}{2} = \sqrt{3} + 3, \sqrt{3} - 3 \xrightarrow{\text{مساوی عبارت اولیه } t \text{ بذار}} \begin{cases} x^2 = \sqrt{3} + 3 \xrightarrow{\text{جذر بگیر}} x = \pm\sqrt{\sqrt{3} + 3} \\ x^2 = \sqrt{3} - 3 \xrightarrow{x^2 \geq 0} \text{امکان ندارد. منفی است} \end{cases}$$

پس در کل دو ریشه دارد.

تعداد جواب‌های معادله دو مجذوری $ax^4 + bx^2 + c = 0$ با شرط $c \neq 0$

معادله دو مجذوری $ax^4 + bx^2 + c = 0$ با فرض $x^2 = t$ حل می‌شود، اینم تعداد جواب‌هاش در حالت کلی:

۱	برای t ، دو عدد مثبت به دست آید.	x چهار ریشه خواهد داشت؛ دوهو قرینه!
۲	برای t ، فقط یک عدد مثبت به دست آید.	x دو ریشه قرینه خواهد داشت.
۳	برای t ، فقط یک جواب منفی در بیاید.	x هم ریشه‌ای نخواهد داشت.

اگر $c = 0$ باشد، $ax^4 + bx^2 = 0 \Rightarrow x^2(ax^2 + b) = 0$ و بقیه‌ش معلومه...

تعداد جواب‌های معادله درجه n

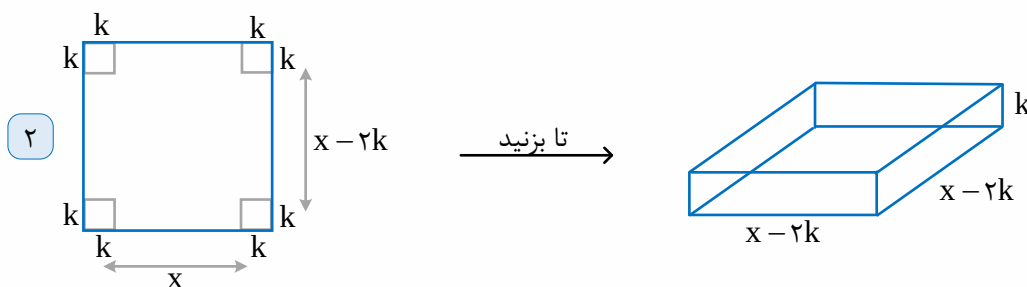
یک معادله جبری از درجه n ، حداکثر n ریشه حقیقی دارد. مثلاً یک معادله درجه چهارم، بیشترین تعداد ریشه‌ای که می‌تواند داشته باشد، چهارتا است!

این جوری هم ببین: معادله درجه n نمی‌تواند $n+1$ ریشه یا بیشتر داشته باشد.

مسئله‌های کاربردی معروف از معادله درجه دوم

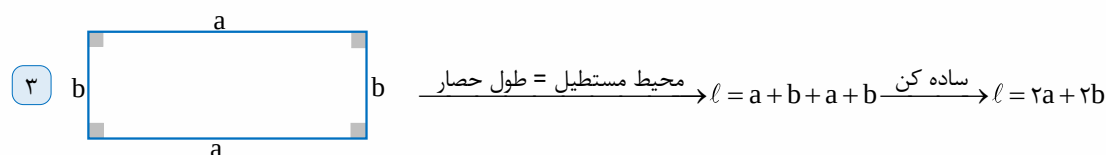
۱- تعداد بازی‌ها	در یک دوره بازی که هر تیم با هر کدام از تیم‌های دیگر فقط یک بازی انجام می‌دهد، با فرض داشتن n تیم، تعداد بازی‌ها یک عبارت درجه دوم است.	$\frac{n(n-1)}{2} = \text{تعداد بازی‌ها}$
۲- ساختن قوطی	اگر چهار مربع کوچک به ضلع k را از گوشه‌های مربعی برش بدهیم و با تا زدن صفحه یک جعبه به حجم V بسازیم...	$\sqrt{\frac{V}{k}} + 2k = \text{ضلع مربع اصلی}$
۳- حصارکشی	از یک رشته سیم به طول ℓ ، می‌خواهید مستطیلی به مساحت S بسازید...	$\frac{\ell + \sqrt{\ell^2 - 16S}}{4} = \text{یکی از اضلاع مستطیل}$

اینم دلیلش:



$$\text{فرمول حجم مکعب مستطیل} \rightarrow V = (x-2k)(x-2k)k \Rightarrow V = (x-2k)^2 k \xrightarrow{\div k} \frac{V}{k} = (x-2k)^2$$

$$\xrightarrow{\text{جذر بگیر}} \sqrt{\frac{V}{k}} = (x-2k) \xrightarrow{\text{را پیدا کن} + 2k} x = \sqrt{\frac{V}{k}} + 2k$$



$$\xrightarrow{\text{b را پیدا کن}} b = \frac{l-2a}{2} \xrightarrow{\text{مساحت} = ab} S = a \left(\frac{l-2a}{2} \right) \xrightarrow{\text{ضرب کن}} S = \frac{la-2a^2}{2} \xrightarrow{\times 2} 2S = la - 2a^2$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب کن}} 2a^2 - la + 2S = 0 \xrightarrow{\text{معادله درجه دو حل کن}} a = \frac{\ell + \sqrt{\ell^2 - 16S}}{4}$$



تست: می‌خواهیم با بریدن چهار مربع به ضلع ۳ در گوشه‌های یک صفحه مربعی شکل و بعد تا کردن آن، یک ظرف به حجم ۷۵ بسازیم. ضلع مربع را باید چند در نظر بگیریم؟

- ۷ (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۱ (۴)

پاسخ:

$$x = \sqrt{\frac{V}{k}} + 2k \xrightarrow{V=75, k=3} x = \sqrt{\frac{75}{3}} + 2(3) = \sqrt{25} + 6 = 5 + 6 = 11$$

تست: با یک طناب ۱۵ متری می‌خواهیم دور تا دور مستطیلی به مساحت ۹ را کاملاً بپوشانیم. ضلع کوچک‌تر مستطیل کدام است؟

- ۱ (۱) ۱/۵ (۲) ۲ (۳) ۲/۵ (۴)

پاسخ:

$$a = \frac{\ell + \sqrt{\ell^2 - 16S}}{4} \xrightarrow{\ell=15, S=9} a = \frac{15 + \sqrt{225 - 144}}{4} = \frac{15 + \sqrt{81}}{4} = \frac{15 + 9}{4} = 6$$

$$\xrightarrow[\text{ضلع دیگر مستطیل رو پیدا کن}]{S=ab=9} 6 \times b = 9 \Rightarrow b = \frac{9}{6} \xrightarrow{\text{ساده کن}} b = \frac{3}{2} = 1/5$$

حل مسائل ماکسیم و مینیم به کمک معادله درجه دو

غیر از چند مسئله معروفی که در کتاب درسی اشاره شده و در بالا به آن‌ها پرداختیم، می‌خواهیم به یک مدل از تست‌ها توجه کنیم که دسته متنوعی را هم شامل می‌شوند؛ فرم این تست‌ها این‌طوری است که در ظاهر خبری از عبارت درجه دو، ریشه و ... نیست! در صورت تست یک مسئله ریاضی است که با یک سری توضیحات، در نهایت خواسته که یک چیزی ماکسیم یا مینیم شود. شاخصه اصلی تست‌هایی که چنین فرمی دارند و با کمک تابع درجه دو حل می‌شوند، این است که دو تا متغیر  در تست حضور دارد. (معمولاً مثبت‌اند، چون در سؤالات کاربردی و عملی حضور داریم....!)

این‌جوری هم ببین: مسئله‌ای که صحبت از دو متغیر می‌کند و در آن خواسته شده که یک چیزی ماکسیم یا مینیم شود، معمولاً با تابع درجه دو حل می‌شود.

اما روش برخورد ما با این تست‌ها این‌طوری است:

۱- از رابطه‌ای که بین دو تا متغیر داده شده است، یکی را بر حسب دیگری پیدا می‌کنیم؛ مثلاً a را بر حسب b . **ببین:**

$$a + 2b = 4 \Rightarrow a = 4 - 2b$$

۲- حالا عبارتی را که قرار است ماکسیم یا مینیم شود می‌نویسیم و بعد متغیری را که در مرحله قبل بر حسب دیگری پیدا کرده بودیم، در این رابطه جای‌گذاری کرده و ساده می‌کنیم.

۳- خب الان عبارتی که در مرحله (۲) پیدا کرده‌اید، یک عبارت درجه دوم است بر حسب یک متغیر. جالب است بدانید اگر تست خواسته باشد که عبارت ماکسیم شود، به تابع درجه دومی با a منفی خواهید رسید و چنانچه بخواهد که مینیم شود، حتماً در تابع درجه دوم حاصل، a مثبت در می‌آید؛ منظورمان از a ، ضریب x^2 است...!

! می‌دانید برای آن‌که عبارت $ax^2 + bx + c = 0$ به ماکسیم یا مینیم خود برسد باید x (یا هر مجهول دیگر

عبارت) مساوی $-\frac{b}{2a}$ شود و مقدار ماکسیم یا مینیم هم، $-\frac{\Delta}{4a}$ است.

تست: برای دو عدد مثبت x و y می‌دانیم: $3x + 2y = 24$. اگر xy بیشترین مقدار ممکن باشد، مقدار $y - x$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ:

$$3x + 2y = 24 \xrightarrow{y \text{ را پیدا کن}} y = \frac{24 - 3x}{2} \xrightarrow{\text{در رابطه بذار}} xy = x \left(\frac{24 - 3x}{2} \right) \xrightarrow{\text{کسر را تفکیک کن}} x \left(12 - \frac{3}{2}x \right)$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب کن}} 12x - \frac{3}{2}x^2 \xrightarrow{\text{مرتب کن}} -\frac{3}{2}x^2 + 12x \xrightarrow{\text{ماکسیم شود}} x = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2\left(-\frac{3}{2}\right)} = -\frac{12}{-3} = 4$$

$$\xrightarrow{y = \frac{24 - 3x}{2}} y = \frac{24 - 3(4)}{2} = \frac{24 - 12}{2} = 6 \Rightarrow y - x = 6 - 4 = 2$$



تست: مستطیلی را با کمک یک سیم به طول ۲۰ ساخته ایم اگر بخواهیم قطر این مستطیل کمترین مقدار ممکن شود مساحت مستطیل چقدر است؟

۲۵ (۴)

۳۰ (۳)

۳۵ (۲)

۲۴ (۱)

پاسخ:

۱ $\Rightarrow$ با سیم به طول ۲۰ مستطیل ساخته شده $\Rightarrow$ محیط مستطیل = ۲۰ $\Rightarrow 2r + 2t = 20 \xrightarrow{\div 2} r + t = 10$

r را پیدا کن $\rightarrow r = 10 - t$

۲ $A = \sqrt{r^2 + t^2}$: قطر مستطیل عبارتی که باید مینیمم شود $\xrightarrow{\text{رادیکال را فعلاً بیخیال شو!}} r^2 + t^2$ مینیمم شود $\xrightarrow{\text{طبق ۱}}$

$\xrightarrow{\text{ساده و مرتب کن}} t^2 - 20t + 100 \xrightarrow{\text{مینیمم شود}} t = -\frac{-20}{2(1)} = -\frac{-20}{2} = 10$

$\xrightarrow{r+t=10} r = 0 \xrightarrow{\text{مساحت مستطیل } S=rt} 0 \times 10 = 0$

! اگر این رابطه‌ها را به خاطر داشته باشید و درست استفاده کنید، میان‌بری می‌شود برای حل بعضی از

این نوع تست‌ها، در واقع دیگر عبارت درجه دو و ماجراهای آن را نخواهید دید!

۱- اگر مجموع دو عدد مثبت، مقداری ثابت باشد، حاصل ضرب آن‌ها موقعی بیشترین مقدار خود را خواهد داشت که آن دو عدد مساوی باشند.

۲- اگر حاصل ضرب دو عدد مثبت، مقداری ثابت باشد، مجموع آن‌ها موقعی کمترین مقدار خود را خواهد داشت که آن دو عدد مساوی باشند.

دقت:

۱- $x + y = k \xrightarrow{\text{ماکسیم } xy, k > 0} x = y = \frac{k}{2}$

۲- $xy = k \xrightarrow{\text{مینیمم } x+y, k > 0} x = y = \sqrt{k}$

تست: اگر $xy^2 = 8$ و x عددی مثبت باشد، کمترین مقدار $x + y^2$ کدام است؟

$6\sqrt{2}$ (۴)

$4\sqrt{2}$ (۳)

$2\sqrt{2}$ (۲)

۸ (۱)

پاسخ:

$$xy^2 = 8 \xrightarrow{x=y^2=\sqrt{8}} x+y^2 = \sqrt{8} + \sqrt{8} = 2\sqrt{8} = 2(2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$$

این هم نامساوی واسطه‌های حسابی و هندسی: $a, b \geq 0 \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ دیدگاه جالبی از نکته

قبلی هم هست! این هم می‌تواند برای حل تست‌های ماکسیم و مینیم‌یابی کمکتان کند...

تست: در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که مجموع دو ضلع قائمه آن ۱۶ است، مساحت، بیشترین مقدار خود را دارد.

این مساحت چقدر است؟

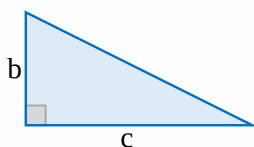
64 (۴)

32 (۳)

16 (۲)

۸ (۱)

پاسخ:



$$\begin{aligned} &\xrightarrow{\text{فرض}} b+c=16 \xrightarrow{\text{نامساوی واسطه‌ها}} \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc} \xrightarrow{\text{جای گذاری کن}} \frac{16}{2} \geq \sqrt{bc} \\ &\Rightarrow 8 \geq \sqrt{bc} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 64 \geq bc \xrightarrow{\div 2} 32 \geq \frac{bc}{2} \Rightarrow 32 \geq S \\ &\quad \downarrow \\ &\quad \text{مساحت مثلث} \end{aligned}$$

دقت دارید که $S \leq 32$ ، یعنی بیشترین مقدار مساحت می‌شود ۳۲ و در بقیه موارد از آن کمتر است!