

جزوه تدریس

به سبک استاد علی داودوندی رتبه ۶۱ کنکور



برای استفاده بهتر از این جزوه ابتدا ویدیو مربوط به این مبحث را در آپارات یا یوتیوب مشاهده کنید. حتی اگر بخش کوچکی از این مبحث رو مدنظر دارید ببینید از روی **تایم لاین** های مشخص شده میتوانید آن را پیدا کنید.

 ALIDAVOODVANDI.IR

 [ALI.DAVOODVANDI](https://www.instagram.com/ALI.DAVOODVANDI)

 [ALI.DAVOODVANDI](https://www.youtube.com/ALI.DAVOODVANDI)

 [ALI.DAVOODVANDI](https://www.twitch.tv/ALI.DAVOODVANDI)

 ۰۹۳۸۳۱۶۵۳۵۴

 [ALI.DAVOODVANDI](https://www.telegram.me/ALI.DAVOODVANDI)



فصل ۱: مجموعه، الگو و دنباله

مجموعه های مهم در ریاضیات عبارت اند از:

$$W = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \text{ اعداد حسابی}$$

$$N = \{1, 2, 3, \dots\} \text{ اعداد طبیعی}$$

$$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \text{ اعداد صحیح}$$

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in Z, n \neq 0 \right\} \text{ اعداد گویا}$$

$$Q' = \left\{ \begin{array}{l} \text{مجموعه اعدادی که نتوانیم آن ها را به صورت نسبت} \\ \text{دو عدد صحیح بنویسیم مانند } \sqrt{2}, \sqrt{3}, 1/666 \end{array} \right\} \text{ اعداد گنگ } (R - Q)$$

$$R = Q \cup Q' \text{ اعداد حقیقی}$$

رابطه بین مجموعه های بالا به صورت $N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$ می باشد.

مثال: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید. (مشابه کار در کلاس صفحه ۲)

الف) $(Z \cup W) \cap Q$

ب) $(W - N) \cup Z$

حل: می دانیم اگر $A \subset B$ باشد، آنگاه: $A \cup B = B$ و $A \cap B = A$ در نتیجه خواهیم داشت:

الف) $\underbrace{(Z \cup W)}_Z \cap Q = Z \cap Q = Z$

ب) $\underbrace{(W - N)}_{\{0\}} \cup Z = \{0\} \cup Z = Z$



بازه‌ها

۴ نوع بازه برای نمایش مجموعه‌هایی وجود دارد که همگی آن‌ها زیرمجموعه R هستند:

$$[a, b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \in R \mid a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in R \mid a < x \leq b\}$$

$$(a, b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$$

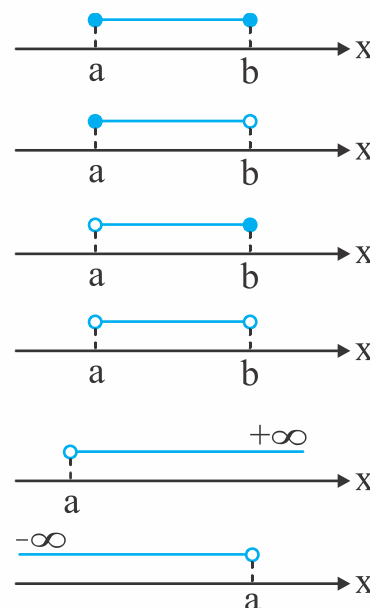
$$(a, +\infty) = \{x \in R \mid x > a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in R \mid x < a\}$$

نکته: هر مجموعه مثل $R - \{a\}$ را می‌توانیم به صورت

$(-\infty, a) \cup (a, +\infty)$ نیز نمایش دهیم. مثلاً $R - \{2\}$ برابر است با

$$(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$$



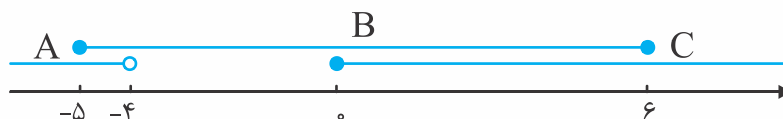
مثال: با فرض آن که $A = (-\infty, -4)$ ، $B = [-5, 6]$ و $C = [0, +\infty)$ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

(مشابه در کلاس صفحه ۵)

الف) $(A \cup B) \cap C$

ب) $(A - B) \cup C$

حل:



الف) $A \cup B = (-\infty, 6] \Rightarrow (A \cup B) \cap C = (-\infty, 6] \cap [0, +\infty) = [0, 6]$

برای محاسبه $A - B$ باید عضوهای مشترک A و B را از A حذف کرده، آنچه از A باقی می‌ماند $A - B$ است، به عبارت دیگر $A - B = A - (A \cap B)$.

$$A - B = (-\infty, -5) \Rightarrow (A - B) \cup C = (-\infty, -5) \cup [0, +\infty)$$

جواب به دست آمده را نمی‌توان به صورت یک بازه نوشت.

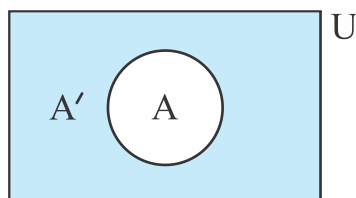


مجموعه های متناهی و نامتناهی

اگر تعداد اعضای یک مجموعه، یک عدد حسابی باشد (حتی یک عدد حسابی خیلی بزرگ) به آن مجموعه، متناهی می‌گوییم؛ مثلاً مجموعه اعداد طبیعی ۸ رقمی، متناهی است و یا مجموعه مولکول‌های موجود در یک مول آب (با آن که تعداد مولکول‌های بسیار زیاد هستند). متناهی است ولی مجموعه‌هایی مثل W ، N ، Z ، Q ، Q' و R و یا بازه‌هایی مثل $(1, 2)$ و $[3, \infty)$ نامتناهی‌اند.

متمم یک مجموعه

اگر U مجموعه مرجع باشد، (مجموعه‌ای که تمام مجموعه‌های مورد بحث ما را شامل می‌شود). آن‌گاه به مجموعه $A' = U - A$ متمم مجموعه A می‌گوییم. یعنی A' شامل عضوهایی از U است که در A نیستند.



نکته: روابط زیر را حتماً حفظ کنید. (البته به کمک رسم نمودار هم می‌توان آن‌ها را اثبات کرد). (شماره‌های ۷، ۸، ۹ و ۱۰ خیلی مهم هستند).

۱) $\emptyset' = U$

۲) $U' = \emptyset$

۳) $A \cup A' = U$

۴) $A \cap A' = \emptyset$

۵) $A - A' = A$

۶) $A' - A = A'$

۷) $(A')' = A$

۸) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

۹) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

۱۰) $A \cap B' = A - B = A - (A \cap B)$



مثال: الف) اگر Z مجموعه مرجع باشد، مجموعه های N' ، W' ، Z' ، $\emptyset'$ و $(N \cup W)'$ را به دست آورید. (جواب ها را روی محور نمایش دهید).

ب) اگر R مجموعه مرجع باشد، علاوه بر قسمت الف) حاصل R' را نیز تعیین کنید. (جواب ها را روی محور نمایش دهید). (مشابه کار در کلاس صفحه ۹)

حل:

الف) $N' = Z - N = \{\dots, -2, -1, 0\}$

$W' = Z - W = \{\dots, -2, -1\}$

$Z' = \emptyset$, $\emptyset' = Z$

$(N \cup W)' = N' \cap W' = \{\dots, -2, -1, 0\} \cap \{\dots, -2, -1\} = \{\dots, -2, -1\}$

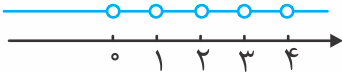
ب) $N = R - N$

اعداد طبیعی را تو خالی می کنیم.



$W' = R - W$

اعداد حسابی را تو خالی می کنیم.



$$\Rightarrow (N \cup W)' = N' \cap W' = \underbrace{R - W}_{\text{محور پایینی}}$$

$Z' = R - Z$, $R' = \emptyset$, $\emptyset' = R$

دو مجموعه جدا از هم: اگر A و B دو مجموعه باشند که اشتراک آن ها $\emptyset$ باشد، اصطلاحاً می گوییم جدا از هم می باشند.

تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه

در حالت کلی تعداد اعضای مجموعه $A \cup B$ از فرمول زیر به دست می آید:
منظور از n تعداد اعضا می باشد.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

دقت کنید اگر $A \cap B = \emptyset$ باشد، آن گاه $n(A \cap B) = 0$ خواهد بود. ضمناً مجموعه $A \cap B$ شامل عضوهایی است که هم در A و هم در B باشند ولی $A \cup B$ شامل عضوهایی است که حداقل در یکی از مجموعه های A و B قرار دارند. (A یا B یا هر دو)



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cup B) = 18 + 7 - 4 = 21$$

- [illegible]



۲- متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعه اعداد طبیعی

ب) مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۳۶

پ) بازه $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

ت) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 2\}$

ث) مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰۰

.....

.....

.....

.....

۳- دو مجموعه نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آنها مجموعه‌ای متناهی باشد.

.....

.....

.....

۴- حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آنها روی یک محور به دست آورید:

ب) $(-\infty, 6] \cap (2, 9)$

الف) $(-3, 0) \cup (-2, 5]$

ت) $(-\infty, 1) \cup [1, +\infty)$

پ) $(3, +\infty) \cap (6, 10)$

ج) $[2, 4) - (3, +\infty)$

ث) $(3, +\infty) - [2, 4)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....



۵- مجموعه $\mathbb{R} - \{3\}$ را روی محور نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.

.....

.....

.....

.....

.....

۶- اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آنگاه A متناهی خواهد بود یا نامتناهی؟

.....

.....

.....

.....

.....

۷- $\mathbb{R}$ را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید و سپس متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید.

الف) $A = [-2, 3)$ ب) $B = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ پ) $C = (0, +\infty)$ ت) $D = (-\infty, 1]$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





۸- $\mathbb{N}$ را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید.

الف) مجموعه‌ای نامتناهی مثل A مثال بزنید که A' هم نامتناهی باشد.

ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثل B مثال بزنید که B' متناهی باشد.

پ) مجموعه‌ای متناهی مثل C مثال بزنید و C' را به دست آورید. C' متناهی است یا نامتناهی؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

۹- اگر $n(A) = 15$, $n(A \cap B) = 5$ و $n(A \cap B) = 30$, آنگاه $n(B)$ را محاسبه کنید.

.....

.....

.....

.....

.....

۱۰- فرض کنیم A و B زیر مجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U باشند، به طوری که $n(U) = 100$,

$n(A) = 60$, $n(B) = 40$ و $n(A \cap B) = 20$ مطلوب است:

الف) $n(A \cup B)$ ب) $n(A \cap B')$ پ) $n(A' \cap B)$ ت) $n(A' \cap B')$

.....

.....

.....

.....

.....

.....



۱۱- در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۴ نفر از دانش آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آنها عضو گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانش آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است:

الف) تعداد دانش آموزانی که فقط عضو گروه سرودند.

ب) تعداد دانش آموزانی که عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند.

.....

.....

.....

.....

.....

۱۲- در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای، مشخص شد که ۷۰ نفر آنها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام



کردند که در این مدت از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته:

الف) دست‌کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.

ب) فقط از شرکت A خرید کرده‌اند.

پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.

ت) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

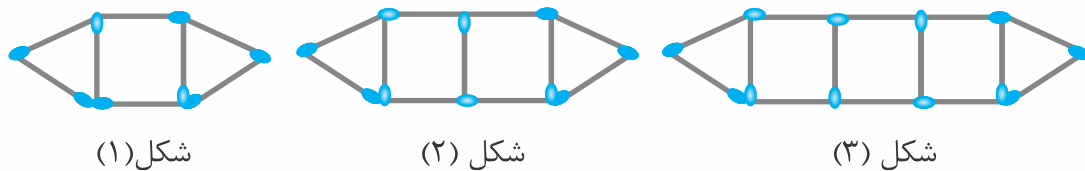
.....

الگو

در این بخش معمولاً چند شکل دنباله دار (مرتبط با هم) به ما داده می شود و باید با توجه به نظمی که در شکل ها می بینیم، نحوه تکمیل شدن شکل ها را بررسی کنیم تا قانون مربوط به آن الگو را کشف کنیم. در نهایت باید بتوانیم جمله عمومی الگو را بنویسیم.

به کمک این جمله عمومی، می توانیم مقدار هر جمله دلخواه از الگو را به دست آوریم. (جمله عمومی را با a_n ، b_n ، c_n و ... نمایش می دهیم).

مثال: با توجه به شکل های زیر، جمله عمومی (a_n) الگو را به دست آورده (یعنی شکل n ام چند چوب کبریت دارد). سپس مشخص کنید شکل دهم چند چوب کبریت دارد؟ (مقدار a_{10} چقدر است؟)

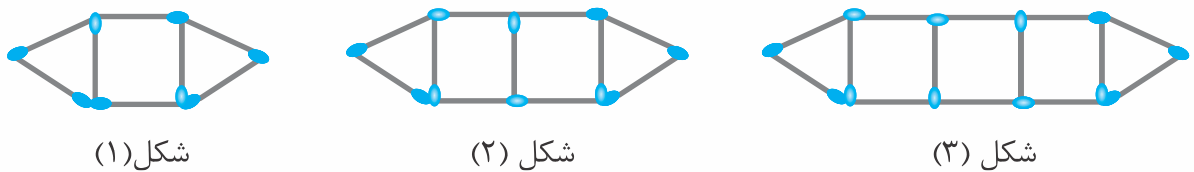


شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

حل:



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

$$\begin{array}{ccc}
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 \begin{array}{c} \text{سمت چپ} \\ \text{شکل} \\ \uparrow \\ (2 + (4) + 2) = 8 \end{array} & \begin{array}{c} \text{سمت راست} \\ \text{شکل} \\ \uparrow \\ (2 + (7) + 2) = 11 \end{array} & \begin{array}{c} \text{سمت راست} \\ \text{شکل} \\ \uparrow \\ (2 + (10) + 2) = 14 \end{array} \\
 & +3 & +3
 \end{array}$$

ملاحظه می کنید که ۲ها در تمام شکل ها ثابت اند ولی اعداد وسط ۳ تا ۳ تا زیاد می شوند. لذا:

$$a_n = [2 + (3n + 1) + 2] = 3n + 5$$

دقت کنید که در جمله عمومی، n همیشه اعداد طبیعی را اختیار می کند. اگر در $a_n = 3n + 5$ به جای n اعداد ۱، ۲ و ۳ را قرار دهیم به جواب های ۸، ۱۱ و ۱۴ می رسیم.

(همان تعداد چوب کبریت ها در شکل های اول، دوم و سوم)

حال برای محاسبه a_{10} کافی است به جای n عدد ۱۰ را قرار دهیم:



تعداد چوب کبریت‌ها در شکل دهم:

$$a_n = 3n + 5 \xrightarrow{(n=10)} a_{10} = 3(10) + 5 = 35$$

الگوی خطی: در مثال قبل دیدید که اختلاف هر دو جمله متوالی برابر ۳ بود. به این‌گونه الگوها که اختلاف هر دو جمله متوالی آن‌ها، عددی ثابت است، الگوهای خطی می‌گوییم و جمله عمومی آن‌ها $a_n = kn + p$ می‌باشد. ($k, p \in \mathbb{R}$)

شماره جملات	a_1	a_2	a_3	...
مقدار جملات	۸	۱۱	۱۴	...
		+ ۳	+ ۳	

ضمناً اختلاف هر دو جمله متوالی، ضریب n می‌باشد. در مثال قبلی دیدید که $a_n = 3n + 5$ بود و تعداد چوب کبریت‌ها نیز ۳ تا ۳ تا زیاد شدند.

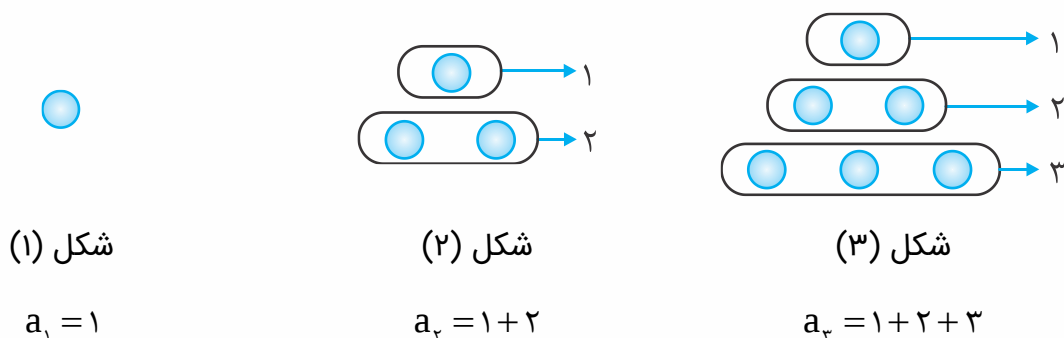
مثال: در یک الگوی خطی، جملات سوم و بیستم به ترتیب ۲ و ۳۶ هستند. جمله عمومی الگو را به دست آورید. (مشابه مثال صفحه ۱۶)

حل: جمله عمومی را به صورت $a_n = kn + p$ در نظر می‌گیریم. (یا می‌توانید به صورت $t_n = an + b$ فرض کنید).

$$\begin{aligned} a_3 = 2 &\Rightarrow k(3) + p = 2 \\ a_{36} = 36 &\Rightarrow k(36) + p = 36 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 3k + p = 2 \\ 36k + p = 36 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} k = 2, p = -4$$

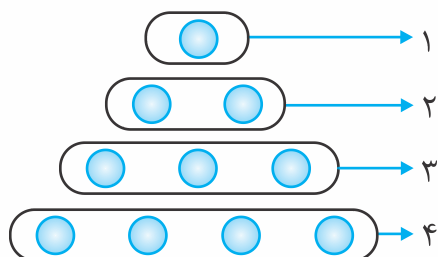
پس جمله عمومی این الگو برابر $a_n = 2n - 4$ می‌باشد. (بعداً می‌بینید که الگوهای خطی، همان دنباله حسابی هستند.)

الگوهای غیرخطی: گاهی اوقات جملات یک الگو با یک مقدار ثابت، زیاد یا کم نمی‌شوند؛ یعنی با الگوهای غیرخطی مواجه‌ایم. مثلاً الگوی زیر غیرخطی می‌باشد، حال جمله عمومی‌اش را به دست می‌آوریم.





رتبه ۱ کنکور



شکل n ام $\Rightarrow$

شکل (۴)

$$\Rightarrow a_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$$

$$a_4 = 1 + 2 + 3 + 4$$

ضمناً به عنوان یک فرمول رابطه $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ را حفظ کنید، پس در این مثال می‌توان گفت:

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

پس الگوی فوق، خطی نیست زیرا در $a_n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$ توان ۲ هم برای n وجود دارد.





دنباله

اگر یک سری از اعداد به طور متوالی پشت سر هم قرار گیرند، یک دنباله ایجاد می‌شود. پس اعداد مربوط به الگوها هم دنباله محسوب می‌شوند. به هر یک از این اعداد، جملات دنباله می‌گوییم. البته دقت کنید که در امتحانات مدارس همیشه شکل به شما داده نمی‌شود، گاهی اوقات چند جمله اول دنباله داده می‌شود و باید جمله عمومی آن را حدس بزنید.

مثال: در هر قسمت، سه جمله بعدی دنباله را نوشته و جمله عمومی آن را حدس بزنید: (مشابه کار در کلاس صفحه ۱۹)

الف) $۱, \sqrt{۲}, \sqrt{۳}, ۲, \sqrt{۵}, \sqrt{۶}, \dots$

ب) $۰/۱, ۰/۰۱, ۰/۰۰۱, \dots$

پ) $-۱, ۸, -۲۷, ۶۴, \dots$

حل:

الف) $۱, \sqrt{۲}, \sqrt{۳}, \sqrt{۴}, \sqrt{۵}, \sqrt{۶}, \sqrt{۷}, \sqrt{۸}, \sqrt{۹}, \dots$

جمله عمومی دنباله: $a_n = \sqrt{n}$

ب) $۰/۱, ۰/۰۱, ۰/۰۰۱, ۰/۰۰۰۱, ۰/۰۰۰۰۱, ۰/۰۰۰۰۰۱, \dots$

یا $۱۰^{-۱}, ۱۰^{-۲}, ۱۰^{-۳}, ۱۰^{-۴}, ۱۰^{-۵}, ۱۰^{-۶}$

جمله عمومی دنباله: $a_n = ۱۰^{-n} = \frac{۱}{۱۰^n}$

پ) $-۱, ۸, -۲۷, ۶۴, \dots$

جمله اول	جمله سوم	جمله دوم	جمله چهارم
$(-۱)^۳$	$۲^۳$	$-(۳)^۳$	$۴^۳$
جملات را می‌توان این‌جوری فرض کرد			

ملاحظه می‌کنید که اولاً علامت‌ها یک در میان $(-)$ و $(+)$ هستند، پس فعلاً $(-۱)^n$ را برای علامت‌ها در نظر می‌گیریم، ثانیاً شماره هر جمله به توان ۳ رسیده است؛ یعنی مثلاً در جمله چهارم، ۴ به توان ۳ رسیده پس در جمله n ام، n به توان ۳ می‌رسد $(n^۳)$ حال خواهیم داشت:

$a_n = (-۱)^n \times n^۳$





دنباله حسابی: دنباله‌ای است که در آن، به تمام جملات مقداری ثابت اضافه یا از تمام جملات مقداری ثابت کم می‌شود؛ دنباله $1, 3, 5, 7, \dots$ و یا $10, 7, 4, \dots$ (همان الگوهای خطی هستند که خواندیم). به این عدد ثابت قدر نسبت می‌گوییم و معمولاً با d نمایش می‌دهیم. (در مثال اول $d = 2$ و در بعدی $d = -3$ بود). اگر جمله اول را با a نشان دهیم، خواهیم داشت:

جملات	a_1	a_2	a_3	a_4	...	a_n
بازشده جملات	a	$a + d$	$a + 2d$	$a + 3d$	...	$a + (n-1)d$
		$+d$	$+d$	$+d$		$+d$

پس جمله عمومی (جمله n ام) دنباله حسابی به صورت $a_n = a + (n-1)d$ می‌باشد. (به جای a و a_n می‌توانید از t_1 و t_n هم استفاده کنید). پس خیلی سریع می‌توان گفت:

$$a_{200} = a + 199d, \quad a_{100} = a + 99d, \quad a_{40} = a + 39d$$

مثال: جمله عمومی دنباله زیر را به دست آورده و به کمک آن a_{100} و a_{200} را محاسبه کنید. کدام جمله از این دنباله برابر ۲۰۰ است؟ $-6, -4, -2, \dots$

حل: در دنباله حسابی، هر دو جمله متوالی را که از هم کم کنیم، d به دست می‌آید ولی راحت‌تر است که از $d = a_2 - a_1$ استفاده کنیم:

$$d = a_2 - a_1 = (-4) - (-6) = 2$$

$$a_n = a + (n-1)d \xrightarrow[d=2]{a=-6} a_n = -6 + (n-1)(2) = -6 + 2n - 2 = 2n - 8 \quad \text{جمله عمومی}$$

$$a_n = 2n - 8 \begin{cases} \xrightarrow{n=100} a_{100} = 2(100) - 8 = 192 \\ \xrightarrow{n=200} a_{200} = 2(200) - 8 = 392 \end{cases}$$

$$a_n = 2n - 8 \xrightarrow{a_n=200} 200 = 2n - 8 \Rightarrow 2n = 208 \Rightarrow n = 104$$

پس جمله صد و چهارم برابر با ۲۰۰ می‌باشد.

مثال: در یک دنباله حسابی جملات سوم و نهم به ترتیب ۱۱ و ۲۳ هستند، جمله عمومی را به دست آورید. (مشابه تمرین ۲ صفحه ۲۴)

حل:

$$\begin{cases} a_3 = 11 \\ a_9 = 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2d = 11 \\ a + 8d = 23 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a = 7, d = 2$$





$$a_n = a + (n-1)d \xrightarrow{a=7, d=2} a_n = 7 + (n-1) \times 2 = 7 + 2n - 2 = 2n + 5$$

نکته: واسطه حسابی بین دو عدد x و y برابر است با $\frac{x+y}{2}$ ، یعنی اعداد $(x, \frac{x+y}{2}, y)$ یک دنباله حسابی

تشکیل می‌دهند. مثلاً واسطه حسابی بین -1 و 5 برابر است با: $\frac{5-1}{2} = 2$. ضمناً در بعضی از سؤالات از

شما خواسته می‌شود بین دو عدد x و y چند عدد دیگر (چند واسطه حسابی) طوری قرار دهید که تمامی این اعداد، تشکیل دنباله حسابی دهند که طبق مثال زیر عمل می‌کنیم. (برای این کار یک فرمول وجود دارد ولی چون کتاب نگفته ما هم نمی‌گیریم.)

مثال: بین دو عدد 3 و 27 پنج عدد طوری قرار دهید که با این دو عدد، تشکیل دنباله حسابی دهند. (مشابه کار در کلاس صفحه ۲۳)

حل:

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & , & \square & , & \square & , & \square & , & \square & , & \square & , & 27 \\ \downarrow & & & & & & & & & & & & \downarrow \\ \text{جمله اول} & & & & & & & & & & & & \text{جمله هفتم} \end{array}$$

$$a_7 = 27 \Rightarrow a + 6d = 27 \xrightarrow{a=3} 3 + 6d = 27 \Rightarrow 6d = 24 \Rightarrow d = 4$$

$$\begin{array}{ccccccc} & +4 & +4 & +4 & +4 & +4 & +4 \\ & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow \\ 3 & , & 7 & , & 11 & , & 15 & , & 19 & , & 23 & , & 27 \end{array}$$

واسطه‌های حسابی

دنباله هندسی: در این دنباله تمام جملات در یک عدد ثابت به نام قدرنسبت ضرب می‌شوند. مانند $2, 6, 18, \dots$ قدرنسبت دنباله هندسی را معمولاً با r یا q نمایش می‌دهیم و برابر است با نسبت

جملات متوالی. البته برای سادگی قدرنسبت را از رابطه $r = \frac{a_r}{a_1}$ به دست می‌آوریم. برای یافتن جمله عمومی به جدول زیر دقت کنید.

جملات	a_1	a_2	a_3	a_4	...	a_n
بازشده جملات	a	$a.r$	$a.r^2$	$a.r^3$	...	$a.r^{n-1}$
		$\times r$	$\times r$	$\times r$		$\times r$

پس جمله عمومی دنباله هندسی $a_n = a.r^{n-1}$ یا $a_n = a.q^{n-1}$ است؛ لذا خیلی سریع می‌توان گفت:

$$a_{n+1} = a.r^n \text{ و } a_{n+2} = a.r^{n+1}, a_{n+3} = a.r^{n+2}$$





مثال: در دنباله زیر، جمله عمومی و جمله هشتم را به دست آورید. کدام جمله این دنباله برابر -40 است؟
 $5, -10, 20, \dots$

حل: جمله عمومی:

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-10}{5} = -2, \quad a_n = ar^{n-1} = 5 \times (-2)^{n-1}$$

$$\xrightarrow{n=8} a_8 = 5(-2)^{8-1} = 5(-2)^7 = -640$$

$$a_n = 5 \times (-2)^{n-1} \xrightarrow{a_n = -40} -40 = 5 \times (-2)^{n-1} \Rightarrow -8 = (-2)^{n-1}$$

$$\Rightarrow (-2)^2 = (-2)^{n-1} \Rightarrow n-1=2 \Rightarrow n=3$$

نکته: در سؤالاتی که دو جمله دلخواه از دنباله هندسی به ما داده می‌شود هر یک از آن‌ها را با توجه به جمله عمومی باز کرده سپس طرفین دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم تا r پیدا شود. با جای‌گذاری r در یکی از روابط a هم پیدا می‌شود. (همیشه بهتره رابطه‌ای که توان r در اون بزرگ‌تره رو در ردیف بالا قرار بدین.)

مثال: در یک دنباله هندسی، جملات سوم و ششم به ترتیب ۱۵ و ۴۰۵ است، جمله عمومی این دنباله را به دست آورید. (مشابه کار در کلاس ۳ صفحه ۲۶)

حل:

$$\begin{aligned} a_6 = 405 \Rightarrow ar^5 = 405 \\ a_3 = 15 \Rightarrow ar^2 = 15 \end{aligned} \xrightarrow{\text{تقسیم روابط}} \frac{ar^5}{ar^2} = \frac{405}{15}$$

$$\Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r^3 = 3^3 \Rightarrow r = 3$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در } ar^2=15} a \times 3^2 = 15 \Rightarrow a = \frac{15}{9}$$

$$\Rightarrow a_n = a.r^{n-1} = \frac{15}{9} \times 3^{n-1}$$

نکته: واسطه هندسی بین اعداد x و y برابر است با $\pm\sqrt{xy}$ (به $\sqrt{xy}$ واسطه هندسی مثبت و به $-\sqrt{xy}$ واسطه هندسی منفی می‌گوییم)؛ یعنی اعداد $(x, +\sqrt{xy}, y)$ و $(x, -\sqrt{xy}, y)$ تشکیل، ۲ دنباله هندسی می‌گویند؛ مثلاً واسطه هندسی مثبت بین ۴ و ۱۶ برابر است با: $\sqrt{4 \times 16} = \sqrt{64} = 8$ ضمناً گاهی اوقات، باید چند واسطه هندسی بین دو عدد قرار دهیم که طبق مثال زیر عمل می‌کنیم.





مثال: بین دو عدد -5 و 160 چهار واسطه هندسی قرار دهید. (جمله اول -5 است.) (مشابه کار در کلاس

صفحة ۲۶)

حل:

$$\begin{array}{ccccccc} -5 & , & \square & , & \square & , & \square & , & \square & , & 160 \\ \downarrow & & & & & & & & & & \downarrow \\ a & & & & & & & & & & a_6 \end{array}$$

$$a_6 = 160 \Rightarrow ar^5 = 160 \xrightarrow{(a=-5)} -5 \times r^5 = 160$$

$$\Rightarrow r^5 = \frac{160}{-5} = -32 \Rightarrow r^5 = (-2)^5 \Rightarrow r = -2$$

$$\begin{array}{ccccccc} \times (-2) & & \times (-2) & & \times (-2) & & \times (-2) \\ -5 & , & \square & , & \square & , & \square & , & \square & , & 160 \end{array}$$

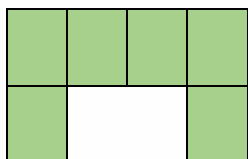




فصل اول پایه دهم (مجموعه ها، الگو و دنباله)

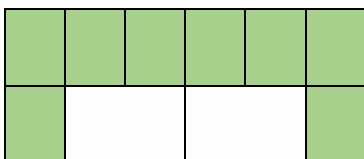
تمرین کتاب درسی

۱۳- به الگوی روبه رو توجه کنید.



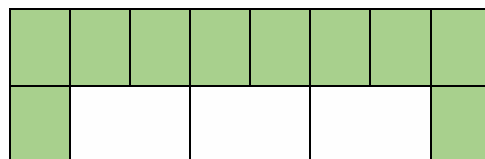
۶ کاشی تیره

۱ کاشی سفید



۸ کاشی تیره

۲ کاشی سفید



۱۰ کاشی تیره

۳ کاشی سفید

الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی‌های تیره آن را مشخص کنید.

(ب) تعداد کاشی‌های تیره در هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله هفتم آن بنویسید.

(پ) اگر n تعداد کاشی‌های سفید و t_n تعداد کاشی‌های تیره باشد، مقدار t_n را بر حسب n بنویسید.

(ت) برای ۱۰۰ کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است؟

(ث) آیا در این الگو، شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی تیره باشد؟ اگر هست، تعداد کاشی‌های سفید آن

چندتا است؟

This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines, typical of primary school handwriting practice paper. The lines are evenly spaced and run across the entire width of the page. There are no margins, text, or other markings present.



۱۴- الگوی زیر را در نظر بگیرید.

شکل (۱)



۱ نقطه

شکل (۲)



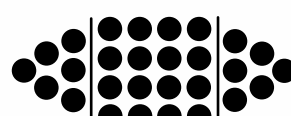
۶ نقطه

شکل (۳)



۱۵ نقطه

شکل (۴)



الف) شکل بعدی را رسم کنید، سپس تعداد نقاط هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید.

ب) جمله عمومی الگو را بیابید.

پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

۱۵- جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جمله اول دنباله را بنویسید و سپس به هر

یک از آنها یک الگوی هندسی نظیر کنید.

الف) $a_n = 4n$

ب) $b_n = 3n + 1$

پ) $c_n = n^2 + 2$

ت) $d_n = n^2 + n$

.....

.....

.....

.....

.....

.....



۱۶- برای هر یک از دنباله‌های درجه دو زیر، جمله عمومی را به دست آورید و سپس برای هر کدام، یک الگوی هندسی نظیر کنید.

الف) $5, 8, 13, 20, 29, \dots$

ب) $5, 12, 22, 35, 51, \dots$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

۱۷- از بین دنباله‌های زیر، دنباله‌های حسابی را مشخص کنید و در هر یک از آنها با تعیین قدرنسبت، جمله بیست و یکم را بیابید.

الف) $3, 10, 17, 24, \dots$

ب) $1, 2, 4, 8, \dots$

پ) $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, \dots$

ت) $10, 7, 4, 1, \dots$

ث) $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \dots$

ج) $2, 2, 2, 2, \dots$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

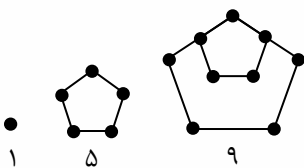
.....



۱۸- در یک دنباله حسابی، جملات سوم و هفتم به ترتیب ۲۰ و ۵۶ است. دنباله را مشخص کنید، یعنی با به دست آوردن جمله اول و قدرنسبت، جملات دنباله را بنویسید.

۱۹- در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول ۳ و مجموع سه جمله بعدی آن ۳۹ است. دنباله را مشخص کنید.

۲۰- الف) دو جمله بعدی الگوی مقابل را با رسم شکل بیابید و نوع دنباله را مشخص کنید.



ب) جمله عمومی آن را مشخص کنید.

پ) جمله چندم این دنباله ۳۹۷ است؟





۲۱- الف) واسطه حسابی بین ۵ و ۱۱ چه عددی است؟

ب) واسطه حسابی بین ۲۰ و ۳۰ چه عددی است؟

پ) از دو قسمت قبل چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

۲۲- مسئله زیر در پاپیروس رابند آمده است. آن را حل کنید.

«۱۰۰ قرص نان را بین ۵ مرد چنان تقسیم کنید که سهم‌های دریافت شده، دنباله حسابی تشکیل دهند و

یک سوم مجموع سه سهم بزرگ‌تر، مساوی مجموع دو سهم کوچک‌تر باشد.»

.....

.....

.....

.....

.....

۲۳- از بین موارد زیر، دنباله‌های هندسی را مشخص کنید و قدر نسبت آنها را بنویسید.

الف) $7, 28, 112, 448, \dots$

ب) $2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}, 6\sqrt{5}, 8\sqrt{5}, \dots$

پ) $1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{8}, \dots$

ت) $5, 5, 5, 5, \dots$

.....

.....

.....

.....





۲۴- چند دنباله هندسی با قدر نسبت $\frac{4}{5}$ می‌توان ساخت؟ دو مورد را بنویسید.

۲۵- درستی یا نادرستی جملات زیر را بررسی کنید. در صورت درست بودن توضیح دهید و در صورت نادرست بودن مثال نقض ارائه کنید.

(الف) هر دنباله، یا حسابی است یا هندسی.

(ب) دنباله‌ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی.

۲۶- علی دوچرخه‌ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دوچرخه دست دوم، در هر سال ۲۰ درصد نسبت به سال قبل از خودش کاهش یابد.

(الف) اگر او بعد از ۳ سال قصد فروش دوچرخه‌اش را داشته باشد، به چه قیمتی می‌تواند آن را بفروشد؟

(ب) قیمت دوچرخه بعد از گذشت n سال از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟





۲, ۴, ۸, ...

۲۷- حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله هندسی مقابل را محاسبه کنید.

۲۸- جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می باشند. دنباله را مشخص کنید.

۲۹- بنابر آمار منتشر شده از جانب پزشکی قانونی کشور، آمار تلفات جاده‌ای از عدد ۲۷۷۵۹ نفر در سال ۱۳۸۴ به عدد ۱۶۷۷۸ نفر در سال ۱۴۰۰ کاهش یافته است. که نشان دهنده حدود ۳ درصد کاهش سالانه در این دهه است. اگر آمار حوادث رانندگی در کشور با همین سرعت کاهش یابد،

الف) پیش‌بینی می‌شود در هر یک از سال‌های منتهی به سال ۱۴۰۵ چند نفر از هموطن‌های ما جان خود را در حوادث رانندگی از دست بدهند؟ نتایج را در جدول زیر ثبت کنید.

سال	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲	۱۴۰۳	۱۴۰۴	۱۴۰۵
تعداد تلفات مورد انتظار						

ب) اعداد حاصل، چه نوع دنباله‌ای تشکیل می‌دهند؟