

تمرین بعد از کلاس

به سبک استاد علی داودوندی رتبه ۶۱ کنکور



در هر قسمت ابتدا ۱ دقیقه خودتان فکر کنید اگه نتوانستید حل کنید ۱ دقیقه به کمک جزوه سوال را حل کنید و اگر باز هم نتوانستید در ۱ دقیقه پاسخنامه را بررسی کرده و سپس مسیر حل را به خودتان توضیح دهید. حل ویدیویی تمرین ها در آپارات و یوتیوب قرار گرفته است و به کمک **تایم لاین** می توانید هر سوال را پیدا کنید و حل آن را مشاهده کنید

 ALIDAVOODVANDI.IR

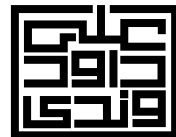
 [ALI.DAVOODVANDI](https://www.instagram.com/ALI.DAVOODVANDI)

 [ALI_DAVOODVANDI](https://www.youtube.com/ALI_DAVOODVANDI)

 [ALI_DAVOODVANDI](https://www.tiktok.com/ALI_DAVOODVANDI)

 ۰۹۳۸۳۱۶۵۳۵۴

 [ALI_DAVOODVANDI](https://www.telegram.me/ALI_DAVOODVANDI)



گزینه ۳

۱

اول: در معادله $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{5})x + \sqrt{10} = 0$ می‌دانیم:

$$\alpha + \beta = \sqrt{2} + \sqrt{5} \quad , \quad \alpha\beta = \sqrt{10}$$

به راحتی می‌توان حدس زد که $\alpha = \sqrt{2}$ و $\beta = \sqrt{5}$ است.

دوم: ریشه‌های معادله $2x^2 - ax + 20 = 0$ مربع α و β می‌باشند. بنابراین ریشه‌های این معادله برابر ۲ و ۵ هستند. با استفاده از رابطه مجموع ریشه‌ها داریم:

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = 2 + 5 = \frac{-(-a)}{2} \Rightarrow a = 14$$

گزینه ۳

۲

اول: ریشه‌های معادله به صورت $\pm\sqrt{2} - 1$ می‌باشند، پس:

$$\begin{cases} S = (\sqrt{2} - 1) + (-\sqrt{2} - 1) = -2 \\ P = (\sqrt{2} - 1)(-\sqrt{2} - 1) = -1 \end{cases}$$

دوم: اگر ریشه‌ها را α و β در نظر بگیریم، داریم:

$$\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS = (-2)^3 - 3(-1)(-2) = -8 - 6 = -14$$

گزینه ۳

۳

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ در صورت وجود دو ریشه متمایز، مجموع آن‌ها از رابطه $\frac{-b}{a}$ و حاصل ضرب آن‌ها از رابطه $\frac{c}{a}$ به دست می‌آید، داریم:

$$-2x^2 + x + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{8}{-2} = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{4\alpha + 4\beta}_{\text{فاکتور از ۴}} - 2\alpha\beta = 4(\alpha + \beta) - 2\alpha\beta$$

$$= 4 \times \left(\frac{1}{2}\right) - 2 \times (-4) = 2 + 8 = 10$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} = 0 \Rightarrow \frac{-(2k-1)}{4k-3} = 0$$

$$\Rightarrow 2k-1=0 \Rightarrow 2k=1 \Rightarrow k=\frac{1}{2}$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = \frac{4}{4k-3} = \frac{4}{4(\frac{1}{2})-3} = \frac{4}{2-3} = -4$$

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ در صورت وجود دو ریشه، حاصل جمع ریشه‌ها از رابطه $-\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب آن‌ها از رابطه $\frac{c}{a}$ به دست می‌آید:

$$x^2 - 3x - 5 = 0 \xrightarrow[\text{مقایسه با فرم استاندارد}]{ax^2+bx+c=0} \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = -5 \end{cases}$$

$$\text{حاصل جمع ریشه‌ها} = -\frac{b}{a} = -\frac{(-3)}{1} = 3 \text{ و } \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = \frac{-5}{1} = -5$$

$$\Rightarrow \frac{\text{حاصل جمع ریشه‌ها}}{\text{حاصل ضرب ریشه‌ها}} = -\frac{3}{5}$$

$$(m-1)x^2 + (m+5)x + 3m = 0 \xrightarrow[\text{مقایسه با فرم استاندارد}]{ax^2+bx+c=0} \begin{cases} a = m-1 \\ b = m+5 \\ c = 3m \end{cases}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} = 0 \Rightarrow \frac{-(m+5)}{m-1} = 0 \Rightarrow -(m+5) = 0$$

$$\Rightarrow m+5=0 \Rightarrow m=-5$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{3m}{m-1} = \frac{3 \times (-5)}{-5-1} = \frac{-15}{-6} = 2\frac{1}{2}$$

در معادله درجه دوم به فرم استاندارد $ax^2 + bx + c = 0$ مجموعه ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب ریشه‌ها $\frac{c}{a}$ است، داریم:

$$(m-1)x^2 + 2x - 4m = 0 \xrightarrow[\text{مقایسه با فرم استاندارد}]{ax^2+bx+c=0} \begin{cases} a = m-1 \\ b = 2 \\ c = -4m \end{cases}$$

طبق فرض صورت سؤال مجموعه ریشه‌ها برابر حاصل ضرب ریشه‌ها است.

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = \frac{-b}{a} = \frac{-2}{m-1}$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = \frac{-4m}{m-1}$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{m-1} = \frac{-4m}{m-1} \Rightarrow -4m = -2 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

اگر x' و x'' ریشه‌های معادله باشند، داریم: $x' = \frac{x''}{2}$

$$x'^2 - 2ax + \lambda a = 0 \xrightarrow[\text{مقایسه با فرم استاندارد}]{a'x'^2+b'x+c'=0} \begin{cases} a' = 1 \\ b' = -2a \\ c' = \lambda a \end{cases}$$

$$\text{حاصل جمع ریشه‌ها: } x' + x'' = \frac{-b'}{a'} = \frac{-(-2a)}{1} = 2a$$

$$\xrightarrow{x'=\frac{x''}{2}} \frac{x''}{2} + x'' = 2a \Rightarrow \frac{3x''}{2} = 2a \Rightarrow x'' = \frac{2 \times 2a}{3} = \frac{4a}{3} \quad (1)$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها: } x'x'' = \frac{c'}{a'} = \frac{\lambda a}{1} \xrightarrow{x'=\frac{x''}{2}} \frac{x''}{2} \times x'' = \lambda a$$

$$\Rightarrow x''^2 = 2 \times \lambda a = 4a \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2),(1)} \left(\frac{4a}{3}\right)^2 = 4a \Rightarrow 16a^2 = 9 \times 4a \Rightarrow a = 9$$

$$x'^2 - 18x + 72 = 0 \Rightarrow (x-6)(x-12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x' = 6 \\ x'' = 12 \end{cases}$$

پس $a = 9$ قابل قبول است.

اگر ریشه‌های معادله موردنظر را α و β درنظر بگیریم، حاصل ضرب ریشه‌ها برابر با $\frac{c}{a}$ ، پس می‌توان چنین نوشت:

$$\alpha = \frac{1}{\beta} \Rightarrow \alpha\beta = 1 \Rightarrow \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow c = a$$

پس باید به دنبال معادله‌ای بگردیم که در آن a و c باهم برابر باشند و فقط معادله گزینه "۲" چنین خاصیتی را دارد.

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ مجموع ریشه‌ها از رابطه $\frac{-b}{a}$ به دست می‌آید، لذا داریم:

$$\frac{1}{2}x^2 - (m+2)x + \frac{13}{2} = 0 \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = -\frac{-(m+2)}{\frac{1}{2}} = 14$$

$$\Rightarrow m+2=7 \Rightarrow m=5$$

پس معادله درجه دوم به صورت $\frac{1}{2}x^2 - 7x + \frac{13}{2} = 0$ است. حال این معادله را از روش Δ حل می‌کنیم:

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{13}{2} = 49 - 13 = 36$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-(-7) + \sqrt{36}}{2 \times \frac{1}{2}} = 7 + 6 = 13$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_2 = \frac{-(-7) - \sqrt{36}}{2 \times \frac{1}{2}} = 7 - 6 = 1$$

پس ریشه بزرگ‌تر معادله $x = 13$ است.

مجموع ریشه‌های معادله اول $S = -\frac{a + \frac{4}{3}}{a}$ و حاصل ضرب ریشه‌های معادله دوم $P = \frac{-a}{3}$ است پس:

$$\frac{-a}{3} = -\frac{\frac{3a+4}{3}}{a} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{3a+4}{3a} \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{3a+4}{a} \Rightarrow a^2 = 3a+4$$

$$\Rightarrow a^2 - 3a - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 4 \end{cases}$$

دقت شود $a = 4$ ، Δ معادله اول را منفی می‌کند و قابل قبول نیست، پس محور تقارن سهمی عبارت است از:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{1 + \frac{5}{2}a}{-2a} = \frac{1 - \frac{5}{2}}{2} = \frac{-3}{4}$$

ابتدا ضابطه تابع درجه دوم f را با داشتن مختصات رأس آن $(B(2, 5))$ می‌نویسیم. داریم:

$$f(x) = a(x - 2)^2 + 5 \Rightarrow f(x) = a(x - 2)^2 + 5$$

چون مثلث ABC در رأس A قائمه است، پس باید شیب ضلع AB و AC را محاسبه کرده و ضرب آن‌ها را برابر -1 قرار دهیم. برای این منظور ابتدا مختصات رئوس A ، B و C را مشخص می‌نماییم. داریم:

$$f(x) = a(x - 2)^2 + 5 \xrightarrow{x=0} A(0, 4a + 5), B(2, 5), C(2, 0)$$

$$\begin{cases} m_{AB} = \frac{4a + 5 - 5}{0 - 2} = -2a \\ m_{AC} = \frac{4a + 5 - 0}{0 - 2} = \frac{4a + 5}{-2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow m_{AB} \cdot m_{AC} = -1 \Rightarrow -2a \times \frac{4a + 5}{-2} = -1 \Rightarrow 4a^2 + 5a = -1$$

$$\Rightarrow 4a^2 + 5a + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \Rightarrow f(x) = -(x - 2)^2 + 5 \Rightarrow f(5) = -4 \\ a = -\frac{1}{4} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 + 5 \Rightarrow f(5) = \frac{-9}{4} + 5 = \frac{11}{4} \end{cases} \Rightarrow \text{در گزینه‌ها نیست}$$

چون مساحت مستطیل برابر ۶ و طول آن برابر ۴ است، پس عرض مستطیل برابر $\frac{3}{2}$ است، یعنی $f(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$ است.

ازطرفی چون سهمی محور x ها را در نقاطی به طول -1 و $x = 4$ قطع کرده است، پس معادله سهمی به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = a(x + 1)(x - 4)$$

$$\Rightarrow f(-\frac{1}{2}) = a(\frac{1}{2})(-\frac{9}{2}) = \frac{3}{2} \Rightarrow a \times (-\frac{9}{4}) = \frac{3}{2} \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{2}{3}(x + 1)(x - 4) \Rightarrow c = f(0) = -\frac{2}{3}(1)(-4) = \frac{8}{3}$$

با فرض $x^2 = t$ معادله داده شده به صورت $t^2 + mt - (m - 3) = 0$ خواهد بود، پس اگر معادله بر حسب t دارای یک ریشه مضاعف باشد، آنگاه بر حسب x دارای دو ریشه مضاعف خواهد بود، داریم:

$$t^2 + mt - m + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow (m)^2 - 4(1)(-m + 3) = 0 \Rightarrow m^2 + 4m - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (m + 6)(m - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -6 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{m=2} t^2 + 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t + 1)^2 = 0 \Rightarrow t = -1$$

$$\Rightarrow x^2 = -1 \quad \text{غقق}$$

$$\xrightarrow{m=-6} t^2 - 6t - (-9) = 0 \Rightarrow t^2 - 6t + 9 = 0$$

$$\Rightarrow (t - 3)^2 = 0 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow x^2 = 3$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{3}, \quad x = -\sqrt{3}$$

پس به ازای $m = -6$ تابع دارای دو ریشه مضاعف $\pm\sqrt{3}$ است.

اگر α و β ریشه های حقیقی $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند، آنگاه داریم:

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 4, \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = 1$$

معادله جدیدی می خواهیم که ریشه های آن به صورت $\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ و $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ باشند پس داریم:

$$S_{\text{جدید}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{1} \quad (*)$$

به دو روش زیر می توانیم (*) را محاسبه کنیم:

$$S_{\text{جدید}}^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = 4 + 2(1) = 6 \Rightarrow S = \sqrt{6}$$

$$S_{\text{جدید}} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}} = \sqrt{4 + 2\sqrt{1}} = \sqrt{6}$$

$$P_{\text{جدید}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \times \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{1}{\sqrt{P}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

$$\text{معادله جدید: } x^2 - S_{\text{جدید}}x + P_{\text{جدید}} = 0 \Rightarrow x^2 - \sqrt{6}x + 1 = 0$$

$$x^2 + 6x + m = x^2 + 2x - 3m \Rightarrow 4x = -4m \Rightarrow x = -m$$

$$x^2 + 2x - 3m = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 3x = 0 \Rightarrow x = 0, x = -5 \Rightarrow m = 5$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow (x + 5)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 3, -5 \Rightarrow 3 - (-1) = 4$$

$$x^2 + 6x + 5 = 0 \Rightarrow (x + 5)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1, -5$$

$$۲kx^۲ - ۴x - ۴k - ۵ = ۰$$

$$P = \alpha\beta = \frac{-۴k - ۵}{۲k} = -۲ - \frac{۵}{۲k}$$

چون قرار است $۲k$ عدد صحیح باشد و $۲k$ باید حداکثر مقدار صحیح منفی باشد، پس: $۲k = -۱$

$$\xrightarrow{k=-\frac{1}{2}} ۲\left(-\frac{1}{۲}\right)x^۲ - ۴x - ۴\left(-\frac{1}{۲}\right) - ۵ = ۰ \Rightarrow -x^۲ - ۴x - ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow \Delta = b^۲ - ۴ac = (-۴)^۲ - ۴(-۱)(-۳) = ۴$$

$$x^۲ + ۷x - ۳ = ۰ \Rightarrow S = -۷, P = -۳$$

یعنی حاصل جمع ریشه‌ها منفی و حاصل ضربشان منفی است پس یکی از ریشه‌ها منفی و دیگری مثبت خواهد بود و باتوجه به اینکه $S < ۰$ است یعنی $|\alpha| < |\beta|$ در نتیجه ریشه منفی مقدار بزرگتری داشته است.

$$|\alpha + ۲\beta| + |\alpha| - |\beta| \xrightarrow{\alpha > 0, \beta < 0} \underbrace{|\alpha + \beta|}_S + \underbrace{|\alpha|}_{+\alpha} - \underbrace{|\beta|}_{-\beta}$$

$$= |-۷ + \beta| + \alpha + \beta = ۷ - \beta + (-۷) = -\beta$$

$$x^۲ + ۲x = t$$

$$۲t^۲ - ۵t - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{۲} : x^۲ + ۲x = -\frac{1}{۲} \Rightarrow x^۲ + ۲x + \frac{1}{۲} = ۰ \Rightarrow \Delta = ۲ > ۰ \\ \Rightarrow S_1 = -۲ \\ t = ۳ : x^۲ + ۲x = ۳ \Rightarrow x^۲ + ۲x - ۳ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱۶ > ۰ \\ \Rightarrow S_۲ = -۲ \end{cases}$$

$$S = S_1 + S_۲ = -۲ + (-۲) = -۴$$

معادله سهمی به صورت $y = a(x - 2)^2 + 1$ است و چون $f(0) = 4$ است پس:

$$a(0 - 2)^2 + 1 = 4 \Rightarrow a = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{3}{4}(x - 2)^2 + 1 = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 4$$

نقطه M روی سهمی است پس همواره به صورت $M(x, \frac{3}{4}x^2 - 3x + 4)$ می باشد. محیط مستطیل را L در نظر می گیریم.

$$L = 2(x + \frac{3}{4}x^2 - 3x + 4) = \frac{3}{2}x^2 - 4x + 8$$

حداقل L برابر $\frac{-\Delta}{4a}$ است.

$$\min(L) = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(16 - 48)}{6} = \frac{16}{3}$$

معادله $\sqrt{2}x^2 - 4\sqrt{2}x + 3\sqrt{2} = 0$ دارای جواب های $x = 1$ و $x = 3$ است که هر دو طبیعی اند. پس هر ۳ گزینه ۱ و ۲ و ۳ با این مثال نقض رد می شوند. چون هیچ یک از ضرایب طبیعی نیستند، a و c هم علامت اند و دلتای معادله هم برابر ۸ است که مربع کامل نیست.

دلیل درستی گزینه ۴ آن است که می دانیم مجموع ۲ عدد طبیعی حتماً مثبت است، پس $S > 0$ و داریم:

$$S > 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < 0 \Rightarrow a \text{ و } b \text{ مختلف‌العلامه هستند}$$

در تابع درجه دو به فرم $y = ax^2 + bx + c$ ، محور تقارن منحنی، خط $x = -\frac{b}{2a}$ است. با توجه به این نکته، مقدار a را به دست می آوریم:

$$y = (a - 1)x^2 + x + 3 \xrightarrow{x=2 \text{ محور تقارن}} x = -\frac{1}{2(a - 1)} = 2 \Rightarrow a - 1 = -\frac{1}{4}$$

بنابراین ضابطه تابع درجه دو به صورت $y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$ درمی آید. معادله $y = 0$ را حل می کنیم:

$$y = 0 \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2 + x + 3 = 0 \xrightarrow{\times(-4)} x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 6)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -2 \end{cases} \text{ غ.ق.ق.}$$

چون در سؤال ذکر شده نمودار را با طول مثبت قطع کند، فقط $x = 6$ قابل قبول است.

برای y های مثبت داریم $y = 2\sqrt{x}$ و نقاط روی آن را $N(x, 2\sqrt{x})$ در نظر می‌گیریم:

$$MN = \sqrt{(x-3)^2 + (2\sqrt{x}-0)^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 9}$$

$$\min(MN) = \sqrt{\frac{-\Delta}{4a}} = \sqrt{-\frac{4-36}{4}} = \sqrt{\lambda} = 2\sqrt{2}$$

اول: شرط آنکه معادله‌ای دو ریشه داشته باشد $\Delta > 0$ است.

$$\Delta > 0 \Rightarrow m^2 - 16 > 0 \Rightarrow m > 4 \text{ یا } m < -4$$

دوم: شرط آنکه ریشه‌های معادله درجه دوم مثبت باشند، این است که $\frac{c}{a} > 0$, $-\frac{b}{a} > 0$ باشد.

$$\frac{c}{a} = \frac{2}{2} = 1 > 0, -\frac{b}{a} = -\frac{m}{2} > 0 \Rightarrow m < 0$$

باتوجه به مقادیر به دست آمده در قسمت اول و دوم باید $m < -4$ باشد.

رأس سهمی : $(m, k) : f(x) = a(x-m)^2 + k$

رأس سهمی : $(-1, 2) : f(x) = a(x+1)^2 + 2$

نقطه روی منحنی : $(0, 1) \in f : 1 = a(0+1)^2 + 2 \Rightarrow a = -1$

$$f(x) = -(x+1)^2 + 2 = -x^2 - 2x + 1$$

$$a + b + c = -2$$

با تغییر متغیر $t = x^2$ داریم:

$$t^2 + (m+1)t + \left(\frac{1}{4}m + \frac{3}{4}\right) = 0$$

برای اینکه معادله ۴ ریشه حقیقی متمایز داشته باشد، باید سه شرط $P > 0$ ، $S > 0$ و $\Delta > 0$ چک شود، پس:

$$\Delta > 0 \Rightarrow (m+1)^2 - 4\left(\frac{1}{4}m + \frac{3}{4}\right) > 0$$

$$\Rightarrow m^2 + m - 2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases} \Rightarrow m > 1, m < -2 \quad (1)$$

$$P > 0 \Rightarrow \frac{1}{4}m + \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow m > -3 \quad (2)$$

$$S > 0 \Rightarrow -(m+1) > 0 \Rightarrow m < -1 \quad (3)$$

اشتراک سه جواب (۱)، (۲) و (۳) برابر است با: $(-3, -2)$

گام اول

الف) ریشه های معادله $3x^2 + 7x + 1 = 0$ را α و β فرض می‌کنیم. بنابراین ریشه های معادله $x^2 + ax + b = 0$ به صورت $(\alpha + 1)$ و $(\beta + 1)$ می شود.

ب) برای به دست آوردن b ، باید حاصل ضرب $(\alpha + 1)(\beta + 1)$ را تعیین کنیم.

گام دوم

$$3x^2 + 7x + 1 = 0 \xrightarrow{\alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه های معادله}} \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{7}{3} \\ \alpha\beta = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$x^2 + ax + b = 0 \xrightarrow{(\alpha+1) \text{ و } (\beta+1) \text{ ریشه های معادله}} (\alpha + 1)(\beta + 1) = b$$

$$\Rightarrow \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = b \xrightarrow[\alpha+\beta=-\frac{7}{3}]{\alpha\beta=\frac{1}{3}} \frac{1}{3} - \frac{7}{3} + 1 = -1 = b \Rightarrow b = -1$$

گام اول

الف) معادله درجه چهار را با تغییر متغیر $x^2 = y$ به معادله درجه دو تبدیل می‌کنیم.
 ب) اگر قرار باشد معادله درجه چهار داده شده دارای چهار ریشه حقیقی متمایز باشد، باید برای معادله درجه دو تشکیل شده داشته باشیم $\Delta > 0$.
 ج) نکته دیگر این است که هر دو ریشه باید مثبت باشند. در این صورت هم حاصل ضرب و هم حاصل جمع ریشه‌ها مثبت است.

گام دوم

$$x^4 - (m+2)x^2 + m+5 = 0 \xrightarrow{x^2=y} y^2 - (m+2)y + m+5 = 0$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow (m+2)^2 - 4(m+5) > 0 \Rightarrow m^2 + 4m + 4 - 4m - 20 > 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 16 > 0 \Rightarrow m^2 > 16 \Rightarrow |m| > 4 \Rightarrow m < -4 \text{ یا } m > 4 \quad (I)$$

حاصل جمع ریشه‌ها مثبت است، پس:

$$-\left(-\frac{(m+2)}{1}\right) > 0 \Rightarrow m+2 > 0 \Rightarrow m > -2 \quad (II)$$

حاصل ضرب ریشه‌ها نیز مثبت است، پس:

$$\frac{m+5}{1} > 0 \Rightarrow m+5 > 0 \Rightarrow m > -5 \quad (III)$$

برای اینکه هر سه شرط فوق برقرار باشد، بین مجموعه جواب‌های به دست آمده اشتراک می‌گیریم:

$$(I) \cap (II) \cap (III) : m > 4$$

گام اول

الف) اگر ریشه های معادله $۴x^۲ - ۷x + ۳ = ۰$ را α و β فرض کنیم، آنگاه ریشه های معادله $۳x^۲ + ax + b = ۰$ ، برابر با $\frac{۲}{\alpha}$ و $\frac{۲}{\beta}$ است.

ب) $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ را از معادله $۴x^۲ - ۷x + ۳ = ۰$ تعیین کرده و با استفاده از آن مقدار a را در معادله دوم مشخص می کنیم.

گام دوم

فرض کردیم α و β ریشه های معادله $۴x^۲ - ۷x + ۳ = ۰$ باشند. داریم:

$$۴x^۲ - ۷x + ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{۷}{۴} \\ \alpha\beta = \frac{۳}{۴} \end{cases} \quad (I)$$

برای تعیین مقدار a باید حاصل جمع ریشه های معادله دوم را به دست آوریم:

$$\begin{aligned} ۳x^۲ + ax + b = ۰ &\xrightarrow{\text{ریشه ها } \frac{۲}{\beta} \text{ و } \frac{۲}{\alpha}} \frac{۲}{\alpha} + \frac{۲}{\beta} = -\frac{a}{۳} \Rightarrow \frac{۲\alpha + ۲\beta}{\alpha\beta} = -\frac{a}{۳} \\ \Rightarrow \frac{۲(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = -\frac{a}{۳} &\xrightarrow{(I)} \frac{۲(\frac{۷}{۴})}{\frac{۳}{۴}} = -\frac{a}{۳} \Rightarrow \frac{۱۴}{۳} = -\frac{a}{۳} \Rightarrow a = -۱۴ \end{aligned}$$

روش اول:

گام اول

وقتی منحنی یک تابع درجه دو بر یک خط مماس باشد، معادله تلاقی خط و منحنی ریشه مضاعف دارد. پس معادله خط و منحنی را تلاقی داده، آن را به یک معادله درجه دو استاندارد تبدیل می کنیم و سپس Δ را برابر صفر قرار می دهیم.

گام دوم

$$-x^2 + bx + 3 = 7 \Rightarrow -x^2 + bx - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - bx + 4 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه مضاعف}} \Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 16 = 0 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$$

به ازای هر کدام از مقادیر b ، نقطه تماس خط و منحنی را تعیین می کنیم:

$$b = 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{y=7} A(2, 7)$$

$$b = -4 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2 \xrightarrow{y=7} A(-2, 7)$$

بنابراین فاصله دو نقطه A و B برابر است با:

$$AB = |2 - (-2)| = 4$$

روش دوم:

بر اساس صورت مسئله، تابع $f(x) = -x^2 + bx + 3$ در نقطه $x = \frac{b}{2}$ یک ماکزیمم دارد و چون بر خط $y = 7$ مماس است پس $f(\frac{b}{2}) = 7$.

فاصله دو نقطه تماس همان فاصله بین ماکزیمم توابع به معادله $y = -x^2 + bx + 3$ است (دو مقدار برای b داریم).

$$f(\frac{b}{2}) = 7 \Rightarrow -\frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{2} + 3 = 7 \Rightarrow \frac{b^2}{4} = 4 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$$

ماکزیمم دو تابع به معادله $y = -x^2 + 4x + 3$ و $y = -x^2 - 4x + 3$ ، به ترتیب نقاط $(+2, 7)$ و $(-2, 7)$ است که فاصله بین آن ها برابر است با:

$$|+2 - (-2)| = +4$$

مجموع ضرایب معادله برابر با صفر است، بنابراین یکی از ریشه‌های این معادله $x = 1$ می‌باشد. حال معادله را تجزیه می‌کنیم تا ریشه‌های دیگر را به دست آوریم.

$$\begin{array}{r} x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4 \quad \left| \frac{x-1}{x^2 + ax + 4} \right. \\ \underline{-(x^3 - x^2)} \\ ax^2 + (4-a)x - 4 \\ \underline{-(ax^2 - ax)} \\ 4x - 4 \\ \underline{-(4x - 4)} \\ 0 \end{array}$$

بنابراین داریم:

$$x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4 = (x-1)(x^2 + ax + 4)$$

معادله دارای سه ریشه مثبت است، در نتیجه باید معادله $x^2 + ax + 4$ دو ریشه متمایز مثبت داشته باشد. پس در معادله $x^2 + ax + 4$ شرایط زیر باید برقرار باشد:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow a^2 - 16 > 0 \Rightarrow a < -4 \text{ یا } a > 4 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{4}{1} > 0 \quad \checkmark \\ S = -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow -\frac{a}{1} > 0 \Rightarrow a < 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} a < -4$$

همچنین ریشه معادله $x^2 + ax + 4$ نباید $x = 1$ باشد ($a \neq -5$). بنابراین مجموعه جواب برابر است با:

$$a < -4, \quad a \neq -5$$

گام اول

الف) با تغییر متغیر $\sqrt{x} = t$ معادله داده شده را به معادله درجه دو تبدیل می کنیم.

ب) برای اینکه معادله اولیه فقط یک ریشه داشته باشد، معادله جدید باید دارای یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی باشد (چون در این صورت یک بار $\sqrt{x}$ برابر یک عدد مثبت شده که یک جواب به دست می آید و یک بار برابر یک عدد منفی شده که قابل قبول نیست) پس در این حالت معادله باید دو ریشه مختلف علامه داشته باشد.

ج) حالت دیگر این است که معادله اولیه فقط دارای یک ریشه باشد که در این صورت معادله جدید یک ریشه مضاعف مثبت دارد.

گام دوم

$$mx - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0 \Rightarrow m(\sqrt{x})^2 - 3(\sqrt{x}) + m - 2 = 0 \xrightarrow{\sqrt{x}=t} mt^2 - 3t + m - 2 = 0$$

$$\text{حالت اول: } t_1 t_2 < 0 \Rightarrow \frac{m-2}{m} < 0 \Rightarrow 0 < m < 2 \quad (I)$$

$$\text{حالت دوم: } mt^2 - 3t + m - 2 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} 9 - 4m(m-2) = 0 \Rightarrow 9 - 4m^2 + 8m = 0$$

$$\Rightarrow -4m^2 + 8m + 9 = 0 \Rightarrow m = \frac{-8 \pm 4\sqrt{13}}{-8} = \frac{2 \pm \sqrt{13}}{2} \xrightarrow{m>0} m = \frac{2 + \sqrt{13}}{2} \quad (II)$$

جواب سؤال اجتماع (I) و (II) است که باتوجه به گزینه ها جواب به صورت $0 < m < 2$ می شود.

روش اول:

محیط مستطیل $2(a+b)$ و مساحت ab است.

$$\text{محیط} = 2(a+b) = 30 \Rightarrow a+b=15 \Rightarrow b=15-a$$

$$\text{مساحت} = ab = a(15-a) = -a^2 + 15a$$

برای به دست آوردن ماکزیمم این عبارت، رأس سهمی را می یابیم؛ توجه کنید که طول رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ برابر $x = \frac{-b}{2a}$ است.

$$a = \frac{-15}{-2} = \frac{15}{2}$$

حال $a = \frac{15}{2}$ را در عبارت قرار می دهیم:

$$-\left(\frac{15}{2}\right)^2 + 15\left(\frac{15}{2}\right) = -\frac{225}{4} + \frac{225}{2} = \frac{225}{4} = 56\frac{1}{4}$$

روش دوم: به یاد داشته باشید در میان مستطیل هایی با محیط ثابت، بیشترین مساحت زمانی است که مربع باشد؛ پس:

$$2(a+b) = 30 \Rightarrow a+b=15 \xrightarrow{a=b} 2a=15 \Rightarrow a = \frac{15}{2}$$

و ادامه حل مانند روش اول است.

نکته: مختصات نقطه رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت $(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ است. بنابراین باتوجه به نکته و صورت سؤال باید طول و عرض مختصات رأس سهمی مثبت باشد:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2m} > 0 \Rightarrow m < 0 \quad (1)$$

$$y_S = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(4 - 4(m)(3))}{4(m)} = \frac{-(4 - 12m)}{4m} = \frac{-1 + 3m}{m} > 0$$

$$\begin{cases} (m > 0, 3m - 1 > 0 \Rightarrow m > \frac{1}{3}) \Rightarrow m > \frac{1}{3} \\ \text{یا} \\ (m < 0, 3m - 1 < 0 \Rightarrow m < \frac{1}{3}) \Rightarrow m < 0 \end{cases} \quad (2)$$

از اشتراک (۱) و (۲)، $m < 0$ پاسخ سؤال است.

مجموع ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ در صورت وجود از رابطه $-\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب ریشه‌ها از رابطه $\frac{c}{a}$ به دست می‌آید. لذا داریم:

$$3x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = \frac{-b}{a} = \frac{-(-5)}{3} = \frac{5}{3}$$

$$6x^2 - 7x - 2 = 0 \Rightarrow \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$$

$$\text{اختلاف} = \frac{5}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = 2$$

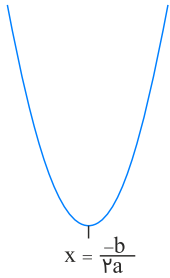
برای اینکه تابع $\frac{x^3 + ax + 2a}{x + 1}$ به شکل سهمی باشد، باید $x = -1$ ریشه صورت کسر هم باشد؛ پس داریم:

$$x = -1 \Rightarrow (-1)^3 + (a)(-1) + 2a = 0 \Rightarrow a = 1$$

با جایگذاری $a = 1$ در تابع f داریم:

$$f(x) = \frac{x^3 + x + 2}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x^2 - x + 2)}{x + 1} \xrightarrow{x \neq -1} f(x) = x^2 - x + 2$$

باتوجه به اینکه $a > 0$ است، نمودار سهمی به صورت زیر است و برد تابع همواره برابر است با $[\frac{-\Delta}{4a}, +\infty)$:



حال با استفاده از تابع f و نمودار سهمی، نقطهٔ مینیمم را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = x^2 - x + 2 \Rightarrow \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2}$$

با جایگذاری $x = \frac{1}{2}$ ، کمترین مقدار تابع برابر است با:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{4}$$

بنابراین، برد تابع برابر با $[\frac{7}{4}, +\infty)$ است.

اول: کمترین مقدار تابع $y = ax^2 + bx + c$ در نقطهٔ $x = \frac{-b}{2a}$ رخ می‌دهد.

دوم: کمترین مقدار $y = ax^2 - 3x + b$ در $x = a$ رخ می‌دهد.

$$\Rightarrow x = a = -\frac{(-3)}{2a} \Rightarrow 2a^2 = 3 \Rightarrow a^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

سوم: تابع درجه ۲ وقتی دارای کمترین مقدار است که ضریب x^2 مثبت باشد. پس فقط $a = \sqrt{\frac{3}{2}}$ قابل قبول است.

اگر تابع درجه دو دارای ماکزیمم باشد، باید ضریب x^2 منفی شود.

ضریب x^2 منفی است پس:

$$K + 3 < 0 \Rightarrow K < -3$$

عرض بیشترین مقدار تابع (عرض ماکزیمم) برابر صفر است:

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta}{4a} = 0 &\Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4(K+3)K = 0 \\ \Rightarrow 16 = 4(K+3)K &\Rightarrow K(K+3) = 4 \Rightarrow K^2 + 3K - 4 = 0 \\ \Rightarrow (K+4)(K-1) = 0 &\xrightarrow{K < -3} K = -4 \end{aligned}$$

البته اگر از اول نگاهی به گزینه‌ها می‌انداختیم، تنها گزینه‌ای که $K < -3$ باشد، گزینه ۱ یعنی $K = -4$ است.

$$\alpha + \beta = \frac{5}{2} \quad \alpha\beta = 1$$

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\alpha^6 + 1}{\alpha^3} = \alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} \\ \xrightarrow{\alpha\beta=1} x' &= \alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS = \frac{125}{8} - \frac{15}{2} \\ \Rightarrow x' &= \frac{125 - 60}{8} = \frac{65}{8} \end{aligned}$$

$$x'' = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} = \alpha + \frac{1}{\alpha} \xrightarrow{\alpha\beta=1} x'' = \alpha + \beta = \frac{5}{2}$$

$$S_{\text{جدید}} = x' + x'' = \frac{65}{8} + \frac{5}{2} = \frac{65 + 20}{8} = \frac{85}{8}$$

$$P_{\text{جدید}} = x'x'' = \frac{65}{8} \times \frac{5}{2} = \frac{325}{16}$$

معادله جدید:

$$x^2 - \frac{85}{8}x + \frac{325}{16} = 0 \xrightarrow{\times 16} 16x^2 = 170x - 325$$

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = ۳, \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -۲$$

α ریشهٔ معادلهٔ $x^۲ - ۳x - ۲ = ۰$ است، پس در آن صدق می‌کند.

$$\alpha^۲ - ۳\alpha - ۲ = ۰ \Rightarrow \alpha^۲ - ۲\alpha = \alpha + ۲$$

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\alpha^۲ - ۲\alpha} + \frac{\alpha}{\beta + ۲} &= \frac{\beta}{\alpha + ۲} + \frac{\alpha}{\beta + ۲} = \frac{\beta^۲ + ۲\beta + \alpha^۲ + ۲\alpha}{\alpha\beta + ۲(\alpha + \beta) + ۴} \\ &= \frac{\beta^۲ + \alpha^۲ + ۲(\alpha + \beta)}{\alpha\beta + ۲(\alpha + \beta) + ۴} = \frac{S^۲ - ۲P + ۲S}{P + ۲S + ۴} = \frac{۹ + ۴ + ۶}{-۲ + ۶ + ۴} = \frac{۱۹}{۸} \end{aligned}$$

گام اول

اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ + ax + ۹ = ۰$ را برابر α در نظر بگیریم، ریشهٔ دیگر برابر ۲α می‌شود.

گام دوم

روش اول:

حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a} = \frac{۹}{۲}$ است. هریک از ریشه‌ها را تعیین می‌کنیم:

$$\alpha(۲\alpha) = \frac{۹}{۲} \Rightarrow ۲\alpha^۲ = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \alpha^۲ = \frac{۹}{۴} \xrightarrow{\text{ریشه‌ها مثبت}} \alpha = \frac{۳}{۲} \Rightarrow ۲\alpha = ۲\left(\frac{۳}{۲}\right) = ۳$$

بنابراین یکی از ریشه‌ها برابر $\frac{۳}{۲}$ و دیگری برابر ۳ است. پس مجموع ریشه‌ها برابر $۴/۵$ می‌شود.

روش دوم:

یکی از ریشه‌ها α و دیگری ۲α است، پس داریم:

$$\begin{aligned} ۲x^۲ + ax + ۹ &= (x - \alpha)(x - ۲\alpha) = x^۲ - ۳\alpha x + ۲\alpha^۲ \\ \Rightarrow x^۲ + \frac{a}{۲}x + \frac{۹}{۲} &= x^۲ - ۳\alpha x + ۲\alpha^۲ \\ \Rightarrow \frac{a}{۲} &= -۳\alpha, \quad ۲\alpha^۲ = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \alpha^۲ = \frac{۹}{۴} \\ \xrightarrow{\alpha > ۰} \alpha &= \frac{۳}{۲}, \quad ۲\alpha = ۳ \Rightarrow \alpha + ۲\alpha = \frac{۳}{۲} + ۳ = ۴/۵ \end{aligned}$$

وقتی گفته می‌شود معادله دارای دو ریشه معکوس است دو نتیجه می‌گیریم: اولاً Δ در این معادله بزرگ‌تر از صفر است، ثانیاً حاصل ضرب ریشه‌های معادله برابر یک است.

ابتدا معادله را به فرم استاندارد $ax^2 + bx + c = 0$ در می‌آوریم:

$$mx^2 + 3x + m^2 = 2 \Rightarrow mx^2 + 3x + m^2 - 2 = 0$$

برای پیدا کردن مقدار m هر دو شرط بیان‌شده را بررسی می‌کنیم.

$$mx^2 + 3x + m^2 - 2 = 0 \xrightarrow{x_1 \text{ و } x_2 \text{ ریشه‌ها}} x_1 x_2 = 1 \Rightarrow x_1 x_2 = \frac{m^2 - 2}{m} = 1$$

$$\Rightarrow m^2 - 2 = m \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow (m - 2)(m + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 2 \Rightarrow 2x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(2)(2) = 9 - 16 = -7 < 0 \\ m = -1 \Rightarrow -x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(-1)(-1) = 9 - 4 = 5 > 0 \end{cases}$$

با توجه به شرط $\Delta > 0$ فقط $m = -1$ جواب قابل قبول است.

شرط آنکه معادله درجه دومی، ۲ ریشه حقیقی مثبت داشته باشد این است که $\Delta > 0$ ، $S = \frac{-b}{a} > 0$ و $P = \frac{c}{a} > 0$ باشند.

$$x^2 + (m - 2)x + m + 1 = 0$$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(m - 2)}{1} > 0 \Rightarrow m - 2 < 0 \Rightarrow m < 2$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m + 1}{1} > 0 \Rightarrow m > -1$$

از اشتراک دو شرط بالا $-1 < m < 2$ به دست می‌آید و گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ حذف می‌شوند؛ پس اصلاً نیازی به بررسی $\Delta > 0$ نیست ولی ما شرط $\Delta > 0$ را هم بررسی می‌کنیم:

$$\Delta > 0 \Rightarrow (m - 2)^2 - 4(m + 1) > 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 4 - 4m - 4 > 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 4m > 0 \Rightarrow \begin{cases} m > 4 \\ \text{یا} \\ m < 0 \end{cases}$$

از اشتراک $-1 < m < 2$ با شرط بالا به این نتیجه می‌رسیم: $-1 < m < 0$

الف) اگر α و β ریشه های معادله درجه دو داده شده، باشد می دانیم $\alpha^2 + \beta^2 = 6$ است. $\alpha^2 + \beta^2$ برابر است با:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P = 6$$

ب) در صورتی که $\Delta > 0$ باشد معادله درجه دو، دو ریشه حقیقی دارد و اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله فاقد ریشه است.

$$mx^2 - (m+3)x + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{m+3}{m} \\ P = \alpha\beta = \frac{5}{m} \end{cases}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{m+3}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{m}\right) = 6 \Rightarrow \frac{m^2 + 6m + 9}{m^2} - \frac{10}{m} = 6$$

$$\xrightarrow{\times m^2} m^2 + 6m + 9 - 10m = 6m^2 \Rightarrow 5m^2 + 4m - 9 = 0 \Rightarrow (5m+9)(m-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=1 \Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = -4 < 0 \Rightarrow \text{فاقد ریشه حقیقی} \\ m = -\frac{9}{5} \Rightarrow -\frac{9}{5}x^2 - \frac{6}{5}x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow \text{دارای دو ریشه حقیقی} \end{cases}$$

پس فقط به ازای $m = -\frac{9}{5}$ معادله دو ریشه حقیقی دارد.

گام اول

ریشه‌های معادله موردنظر از معکوس ریشه‌های معادله داده شده یک واحد کمتر است، بنابراین ریشه‌های آن به صورت $1 - \frac{1}{\alpha}$ و $1 - \frac{1}{\beta}$ است.

گام دوم

روابط مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را می‌نویسیم:

$$2x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{3}{2} \\ P = \alpha\beta = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

ریشه‌های معادله موردنظر به صورت $1 - \frac{1}{\alpha}$ و $1 - \frac{1}{\beta}$ است، لذا:

$$S' = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} - 2 = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}} - 2 = -5$$

$$P' = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + 1$$

$$= \frac{1 - (\alpha + \beta)}{\alpha\beta} + 1 = \frac{1 - \frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}} + 1 = 2$$

پس معادله به صورت زیر است:

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 2 = 0$$

اگر α و β را ریشه‌های معادله $۲x^۲ - x - ۲ = ۰$ در نظر بگیریم، داریم:

$$۲x^۲ - x - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{1}{۲} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -۱ \end{cases}$$

بنابراین $\alpha^۳$ و $\beta^۳$ ریشه‌های معادله درجه دوم $\lambda x^۲ - mx - \lambda = ۰$ می‌شود:

$$\lambda x^۲ - mx - \lambda = ۰ \Rightarrow S' = \alpha^۳ + \beta^۳ = (\alpha + \beta)^۳ - ۳\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$= \left(\frac{1}{۲}\right)^۳ - ۳(-۱)\left(\frac{1}{۲}\right) = \frac{1}{\lambda} + \frac{۳}{۲} = \frac{۱۳}{\lambda}$$

$$S' = -\frac{b}{a} = \frac{m}{\lambda} \Rightarrow \frac{۱۳}{\lambda} = \frac{m}{\lambda} \Rightarrow m = ۱۳$$

روش اول:

$$\alpha + \beta = ۱ \Rightarrow \alpha = ۱ - \beta, \alpha\beta = -۲$$

$$\Rightarrow (1 - \beta)\beta = -۲ \Rightarrow \beta^۲ - \beta - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \beta = ۲ \Rightarrow \alpha = -۱ \\ \beta = -۱ \Rightarrow \alpha = ۲ \end{cases}$$

حال با جایگذاری α یا β در معادله سؤال داریم:

$$-۴ + k + ۹ - ۲ = ۰ \Rightarrow ۳ + k = ۰ \Rightarrow k = -۳$$

روش دوم:

نکته: حاصل ضرب و حاصل جمع ریشه‌های معادله درجه ۳، $y = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ به صورت $P = \frac{-d}{a}$ و $S = \frac{-b}{a}$ است. فرض می‌کنیم این معادله ریشه دیگری به نام γ دارد. پس:

$$\alpha\beta\gamma = \frac{۲}{۴} \Rightarrow \alpha\beta\gamma = \frac{1}{۲}$$

چون می‌دانیم $\alpha\beta = -۲$ ، پس:

$$\alpha\beta\gamma = \frac{1}{۲} \xrightarrow{\alpha\beta=-۲} -۲\gamma = \frac{1}{۲} \Rightarrow \gamma = \frac{-1}{۴}$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-k}{۴} \xrightarrow[\gamma=-\frac{1}{۴}]{\alpha+\beta=1} 1 + \left(\frac{-1}{۴}\right) = \frac{-k}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۴} = \frac{-k}{۴} \Rightarrow k = -۳$$

معادله استاندارد به صورت $a'x^2 + b'x + c' = 0$ است:

$$x^2 + 6x + a = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \frac{-b'}{a'} = -6 \\ P = \frac{c'}{a'} = a \end{cases}$$

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a'|} \xrightarrow{\alpha < \beta < 0} \alpha - \beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{-a'} \xrightarrow{a'=1} \alpha - \beta = -\sqrt{\Delta}$$

$$\Rightarrow \alpha - \beta = -\sqrt{36 - 4a}$$

$$3\alpha^2 + 2\beta^2 = \frac{\Delta}{P}(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{1}{P}(\alpha^2 - \beta^2) = 12\sqrt{2} + 8\Delta$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta}{P}(\underbrace{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta}_{(\alpha+\beta)^2} - 2\alpha\beta) + \frac{1}{P}((\alpha - \beta)(\alpha + \beta)) = 12\sqrt{2} + 8\Delta$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta}{P}(S^2 - 2P) - \frac{1}{P}(S\sqrt{\Delta}) = 12\sqrt{2} + 8\Delta$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta}{P}(36 - 2a) - \frac{1}{P}(-6)(\sqrt{36 - 4a}) = 12\sqrt{2} + 8\Delta$$

$$\Rightarrow 90 - 8a + 3\sqrt{36 - 4a} = 12\sqrt{2} + 8\Delta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 90 - 8a = 8\Delta \Rightarrow a = 1 \\ 3\sqrt{36 - 4a} = 12\sqrt{2} \Rightarrow 36 - 4a = 32 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

ریشه‌های معادله را α و β در نظر می‌گیریم، حال داریم:

$$\alpha + \beta = \frac{a}{3} \xrightarrow{\beta=3\alpha} \alpha + 3\alpha = \frac{a}{3} \Rightarrow 4\alpha = \frac{a}{3} \Rightarrow a = 12\alpha$$

$$\alpha.\beta = \frac{c}{3} \xrightarrow{\beta=3\alpha} \alpha.3\alpha = \frac{c}{3} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{c}{9} \Rightarrow \alpha = \pm\frac{\sqrt{c}}{3}$$

$$a = 12\alpha = 12\left(\pm\frac{\sqrt{c}}{3}\right) = \pm 4\sqrt{c} \Rightarrow 4 - (-4) = 8$$

تابع $y = ax^2 + bx + c$ دارای ماکسیمم است اگر $a < 0$ باشد و طول آن $x = \frac{-b}{2a}$ است.

$$1 - 18m < 0 \Rightarrow m > \frac{1}{18}$$

$$x = \frac{-\lambda(m^2 + 1)}{2(1 - 18m)} = \frac{1}{2} \Rightarrow 16m^2 - 36m + 18 = 0$$

$$\Rightarrow (4m - 6)(4m - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{4} \\ m = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

هر دو مقدار بزرگتر از $\frac{1}{18}$ هستند، بنابراین قابل قبول می‌باشند.

$$S = \frac{-(-(a^2 + b^2 - 12))}{1} \Rightarrow a + b = a^2 + b^2 - 12$$

$$a + b = (a + b)^2 - 2ab - 12 \quad (I)$$

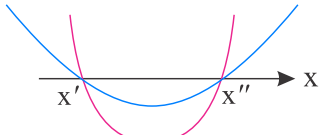
$$P = \frac{a + b - 1}{1} \Rightarrow ab = (a + b) - 1$$

$$\xrightarrow[\text{(I)}]{\text{جایگذاری در رابطه}} a + b = (a + b)^2 - 2(a + b) + 2 - 12$$

$$\Rightarrow (a + b)^2 - 3(a + b) - 10 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = \frac{3 + \sqrt{49}}{2} \Rightarrow a + b = 5 \\ a + b = \frac{3 - \sqrt{49}}{2} \Rightarrow a + b = -2 \end{cases} \quad \checkmark \text{ قابل قبول}$$

چون هر دو معادله ریشه مشترک دارند، جمع و ضرب ریشه‌های آن‌ها یکی است.



$$\begin{cases} x' + x'' = S = -\frac{b}{a} = -\frac{b'}{a'} \xrightarrow{\times(-1)} \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \xrightarrow{\text{عکس}} \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} & (\text{الف}) \\ x'x'' = P = \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'} \xrightarrow{\text{عکس}} \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} & (\text{ب}) \end{cases}$$

$$(\text{الف}), (\text{ب}) \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

پس می‌فهمیم اگر ۲ معادله درجه دوم هر دو ریشه مشترک داشته باشند، ضرایب آن‌ها متناسب است.

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow ac' = a'c \Rightarrow ac' - a'c = 0$$

البته برای حل فقط کافی بود ضرب ریشه‌ها را برابر قرار دهیم.

$$x'x'' = \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'} \Rightarrow a'c = ac' \Rightarrow a'c - ac' = 0$$

نکته: معادله کلی سهمی با رأس (x_S, y_S) به صورت $f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$ است.

باتوجه به نکته و نمودار داده شده مختصات رأس به صورت $(1, -2)$ است، بنابراین معادله کلی سهمی به صورت $y = a(x - 1)^2 - 2$ می‌باشد. همچنین نقطه $(0, -1)$ روی نمودار سهمی قرار دارد، پس:

$$\begin{aligned} -1 &= a(0 - 1)^2 - 2 \Rightarrow -1 = a - 2 \Rightarrow a = 1 \\ \Rightarrow y &= (x - 1)^2 - 2 \Rightarrow y = x^2 - 2x + 1 - 2 = x^2 - 2x - 1 \end{aligned}$$

α و β ریشه‌های معادله هستند، بنابراین:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 2 \\ P = \alpha\beta = -1 \end{cases} \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 4 - 2(-1) = 6$$

نکته: ضابطه کلی سهمی $f(x) = a(x - m)^2 + k$ با مختصات رأس (m, k) به صورت $f(x) = a(x - m)^2 + k$ می‌باشد.

باتوجه به نکته و نمودار داده شده مختصات رأس سهمی به صورت $(-1, 1)$ می‌باشد و معادله کلی سهمی به صورت $f(x) = a(x + 1)^2 + 1$ می‌باشد، پس داریم:

$$\begin{aligned} (0, 2) \in f &\Rightarrow 2 = a(0 + 1)^2 + 1 = a + 1 \\ \Rightarrow a &= 1 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x + 1 + 1 = x^2 + 2x + 2 \end{aligned}$$

با فرض $x^2 - 2x = t$ معادله داده شده به فرم $t^2 - t - 6 = 0$ تبدیل می شود، داریم:

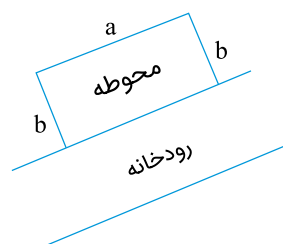
$$t^2 - t - 6 = 0 \Rightarrow (t + 2)(t - 3) = 0 \Rightarrow t = 3, t = -2$$

$$t = -2 : x^2 - 2x = -2 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(2) = 4 - 8 < 0 \text{ ریشه ندارد}$$

$$t = 3 : x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x + 1)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 3$$

پس حاصل جمع ریشه ها برابر با ۲+ است.



$$P = a + 2b \Rightarrow a + 2b = 100 \Rightarrow a = 100 - 2b$$

$$S = a \cdot b \Rightarrow S = (100 - 2b) \times b \Rightarrow S = -2b^2 + 100b$$

بنابراین نمودار درجه دوم:

$$S_{\max} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(100^2 - 0)}{4(-2)} = \frac{10000}{8} = 1250 \text{ m}^2$$

نکته: اگر $S(m, k)$ رأس سهمی باشد، ضابطه سهمی به صورت $f(x) = a(x - m)^2 + k$ می باشد.

$$S(2, 3)$$

$$f(x) = a(x - 2)^2 + 3 \xrightarrow{(0, -1) \in f} -1 = a(0 - 2)^2 + 3 \Rightarrow a = -1$$

$$f(x) = -(x - 2)^2 + 3$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2} - 2\right)^2 + 3 = -\frac{9}{4} + 3 = \frac{3}{4}$$

$$2x^2 - 4x - 1 = 0 \quad \{\alpha, \beta\} \quad \{\alpha + 2, \beta + 2\}$$

$$S = \alpha + \beta = 2, \quad P = \alpha \cdot \beta = \frac{-1}{2}$$

$$\text{معادله جدید } S_1 = x_1 + x_2 = (\alpha + 2) + (\beta + 2) = (\alpha + \beta) + 4 = 2 + 4 = 6$$

$$\begin{aligned} \text{معادله جدید } P_1 &= x_1 \times x_2 = (\alpha + 2)(\beta + 2) = \alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 4 \\ &= \alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 4 = P + 2S + 4 = -\frac{1}{2} + 2(2) + 4 = \frac{15}{2} \end{aligned}$$

$$x^2 - S_1x + P_1 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + \frac{15}{2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 12x + 15 = 0$$

$$x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow S = 1, P = -3$$

$$A = \alpha^3 \beta^3 + \alpha^2 + \beta^2 + \frac{1}{\alpha\beta} = P^3 + (S^2 - 2P) + \frac{1}{P}$$

$$A = (-3)^3 + (1^2 - 2(-3)) + \frac{1}{-3} = -27 + (7) - \frac{1}{3} = -20 - \frac{1}{3} = \frac{-61}{3}$$

این منحنی باید دو ریشه مختلف‌العلامت داشته باشد؛ در نتیجه کافی است حاصل ضرب دو ریشه منفی باشد.

$$P = \frac{c}{a} = \frac{1-m}{m+2} < 0$$

m		-2		1	
P	$-$	$ $	$+$	$ $	$-$

تعریف نشده

$$\Rightarrow m > 1 \text{ یا } m < -2$$

دقت کنید که اگر $\frac{c}{a} < 0$ باشد، $\Delta > 0$ می‌شود.

$$\left| -\frac{b}{a} - \left(-\frac{c}{a}\right) \right| = 2 \Rightarrow \left| -\frac{b}{a} + \frac{c}{a} \right| = 2 \Rightarrow |c - b| = 2a \Rightarrow \begin{cases} c - b = 2a \\ \text{یا} \\ c - b = -2a \Rightarrow b - c = 2a \end{cases}$$

ابتدا حالتی که $c - b = 2a$ باشد را بررسی می‌کنیم، حالت دوم نیز مشابه است.
 چون a یک رقم طبیعی است پس $2a$ زوج و مثبت است. حالت‌های زیر رخ می‌دهد:
 (۱) اگر $c - b = 2$ باشد، آن‌گاه برای c مقادیر $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ وجود دارد. (حالت ۷)
 (۲) اگر $c - b = 4$ باشد، آن‌گاه برای c مقادیر $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ وجود دارد. (حالت ۵)
 (۳) اگر $c - b = 6$ باشد، آن‌گاه برای c مقادیر $\{7, 8, 9\}$ وجود دارد. (حالت ۳)
 (۴) اگر $c - b = 8$ باشد، آن‌گاه برای c مقادیر $\{9\}$ وجود دارد. (حالت ۱)
 بنابراین کل حالت‌ها برابر است با:

$$2(1 + 3 + 5 + 7) = 2 \times 16 = 32$$

تذکر: باتوجه به اینکه به ازای $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 9\}$ دلتا همواره مثبت است، بنابراین کل حالات به دست آمده قابل قبول می‌باشد.

$$S = x_1 + x_2 = 2 + \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} = 4$$

$$P = x_1 \times x_2 = (2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}) = 2^2 - \sqrt{5}^2 = 4 - 5 = -1$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$x^2 - 6x = A \Rightarrow A^2 + 2A - 6^3 = 0$$

$$\Rightarrow (A - 7)(A + 9) = 0 \Rightarrow A = 7, -9$$

$$\begin{cases} x^2 - 6x = 7 \Rightarrow x^2 - 6x - 7 = 0 \Rightarrow x = -1, 7 \\ x^2 - 6x = -9 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

مجموع ریشه‌ها: $-1 + 7 + 3 = 9$

$$S = \alpha + \beta = -۲, \quad P = \alpha\beta = -۱$$

$$x_1 = \frac{S}{\alpha + 1} = \frac{-۲}{\alpha + 1}, \quad x_۲ = \frac{P - ۱}{\beta + 1} = \frac{-۲}{\beta + 1}$$

$$x_1 + x_۲ = \frac{-۲}{\alpha + 1} + \frac{-۲}{\beta + 1} = \frac{-۲(\alpha + \beta) - ۴}{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1} = \frac{-۲(-۲) - ۴}{-۱ - ۲ + 1} = ۰$$

$$x_1 x_۲ = \frac{-۲}{\alpha + 1} \times \frac{-۲}{\beta + 1} = \frac{۴}{-۲} = -۲$$

$$\text{معادله جدید: } x^۲ - (x_1 + x_۲)x + x_1 x_۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۲ = ۰$$

اگر ریشه‌های معادله a و b باشند، داریم:

$$x^۲ - ۲x + ۵ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a + b = ۲ \\ ab = ۵ \end{cases}$$

قرینه و معکوس ریشه‌ها برابر $\frac{-۱}{b}$ و $\frac{-۱}{a}$ است. پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} \frac{-۱}{a} + \frac{-۱}{b} &= \frac{-(a+b)}{ab} = \frac{-۲}{۵} \\ \left(\frac{-۱}{a}\right)\left(\frac{-۱}{b}\right) &= \frac{1}{ab} = \frac{1}{۵} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{معادله}} x^۲ + \frac{۲}{۵}x + \frac{1}{۵} = ۰$$

اگر نمودار تابع $y = -x^۲$ را یک واحد در جهت مثبت محور x ها و یک واحد در جهت مثبت محور y ها انتقال دهیم، نمودار تابع $y = f(x)$ رسم می‌شود. طبق قوانین انتقال، ضابطه تابع $y = f(x)$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y = -(x - 1)^۲ + 1 = -x^۲ + ۲x - 1 + 1 \Rightarrow f(x) = -x^۲ + ۲x$$

اگر نمودار تابع $y = -x$ را یک واحد به موازات محور x ها و در جهت مثبت انتقال دهیم، نمودار تابع $y = g(x)$ رسم می‌شود. بنابراین ضابطه تابع $g(x)$ به صورت $g(x) = -x + 1$ می‌باشد. اکنون می‌توانیم معادله موردنظر را تشکیل داده و مجموع جواب‌های آن را به دست آوریم.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow -x^۲ + ۲x = (-x + 1)^۲ \Rightarrow -x^۲ + ۲x = x^۲ - ۲x + 1 \Rightarrow ۲x^۲ - ۴x + 1 = ۰$$

$$S = x_1 + x_۲ = -\frac{b}{a} = -\frac{-۴}{۲} = ۲$$

$$(x+1)^2 + x - 2 = x^2 + 2x + 1 + x - 2 = x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S = -3 \\ P = -1 \end{cases}$$

$$(x+1)^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = -(x-2)$$

a و b ریشه‌های معادله هستند، بنابراین:

$$\begin{cases} (a+1)^2 = -(a-2) \xrightarrow{\times(a+1)} (a+1)^3 = -(a+1)(a-2) \\ (b+1)^2 = -(b-2) \xrightarrow{\times(b+1)} (b+1)^3 = -(b+1)(b-2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (a+1)^3 + (b+1)^3 &= -(a^2 - a - 2 + b^2 - b - 2) \\ &= -(a^2 + b^2 - (a+b) - 4) = -(S^2 - 2P - S - 4) \\ &= -(9 + 2 - (-3) - 4) = -10 \end{aligned}$$

$$-\frac{b}{a} = -\frac{c}{a} + 2 \Rightarrow b = c - 2a \Rightarrow 2a = c - b$$

$$2 \leq 2a \leq 18 \Rightarrow 2 \leq c - b \leq 18$$

چون $c - b$ برابر با $2a$ است، پس عددی زوج است:

اگر $c - b = 2$ باشد، ۷ حالت وجود دارد.

اگر $c - b = 4$ باشد، ۵ حالت وجود دارد.

اگر $c - b = 6$ باشد، ۳ حالت وجود دارد.

اگر $c - b = 8$ باشد، ۱ حالت وجود دارد.

پس در کل ۱۶ حالت داریم.

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1 \right) \left(\sqrt[3]{x^2} - 1 \right) &= 2 \sqrt[3]{x} \\ \left(\frac{\sqrt[3]{x^6} + \sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) \left(\sqrt[3]{x^2} - 1 \right) &= 2 \sqrt[3]{x} \\ \xrightarrow{\times \sqrt[3]{x^2}} \left(\underbrace{\sqrt[3]{x^6}}_{a^2} + \underbrace{\sqrt[3]{x^2}}_{ab} + \underbrace{1}_{b^2} \right) \left(\underbrace{\sqrt[3]{x^2}}_a - \underbrace{1}_b \right) &= 2x \\ \Rightarrow x^2 - 1 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \end{aligned}$$

جمع ریشه‌ها برابر $\frac{-b}{a}$ است: $\frac{-b}{a} = 2$

چون توان‌های x ‌های استفاده‌شده در معادله، همگی زوج هستند، پس اگر α جواب این معادله باشد، $-\alpha$ هم حتماً جواب معادله است. درنتیجه مجموع جواب‌های این معادله، حتماً صفر است: $S = 0$
الان باید حاصل‌ضرب ریشه‌های این معادله را حساب کنیم. با فرض $x^2 = t$ ، داریم:

$$t^2 - 7t - 5 = 0 \xrightarrow{\Delta=69} t = \frac{7 \pm \sqrt{69}}{2}$$

چون $x^2 \geq 0$ است، پس جواب‌های منفی t ، قابل‌قبول نیستند و درنتیجه فقط $t = \frac{7 + \sqrt{69}}{2}$ قابل‌قبول است.

$$x^2 = \frac{7 + \sqrt{69}}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{7 + \sqrt{69}}{2}}$$

پس:

$$P = -\sqrt{\frac{7 + \sqrt{69}}{2}} \times \sqrt{\frac{7 + \sqrt{69}}{2}} = -\frac{7 + \sqrt{69}}{2}$$

مقدار عبارت خواسته‌شده، برابر است با:

$$2P^2 - \underbrace{3SP}_{\circ} + \underbrace{2S}_{\circ} = 2 \left(-\frac{7 + \sqrt{69}}{2} \right)^2 = 2 \left(\frac{49 + 69 + 14\sqrt{69}}{4} \right) = 59 + 7\sqrt{69}$$

گام اول

الف) نمودار تابع درجهٔ دو در صورتی بر محور x ‌ها مماس می‌شود که ریشهٔ مضاعف داشته باشد. در این صورت $\Delta = 0$ خواهد بود.
ب) چون نمودار تابع بالای محور x ‌ها قرار دارد و بر محور x ‌ها مماس شده است، پس ضریب x^2 مثبت در نظر گرفته می‌شود.

گام دوم

$$y = (m - 2)x^2 - 3x + m + 2$$

$$۱) \quad m - 2 > 0 \Rightarrow m > 2 \quad (I)$$

$$۲) \quad \Delta = 0 \Rightarrow (-3)^2 - 4(m - 2)(m + 2) = 0 \Rightarrow 9 - 4(m^2 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 4 = \frac{9}{4} \Rightarrow m^2 = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow m = \pm \frac{5}{2} \quad (II)$$

اشتراک دو مجموعه جواب (I) و (II) مقدار $m = \frac{5}{2}$ را به ما می‌دهد.

برد تابع $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ به صورت $[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty)$ است.

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4 - 4(3)(-1)}{4(3)} = -\frac{16}{12} = -\frac{4}{3}$$

بنابراین $a = -\frac{4}{3}$ است. پس ضابطه $g(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$g(x) = -\frac{4}{3}x^2 + 3x - 1 \Rightarrow \text{محور تقارن: } -\frac{b}{2a} = \frac{-3}{2(-\frac{4}{3})} = \frac{9}{8}$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 3, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = 1$$

ما حاصل $\frac{\alpha^3}{\beta} + \frac{\beta^3}{\alpha}$ را می‌خواهیم:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^3}{\beta} + \frac{\beta^3}{\alpha} &= \frac{\alpha^4 + \beta^4}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2}{1} = \frac{((\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta)^2 - 2(\alpha\beta)^2}{1} \\ &= (3^2 - 2(1))^2 - 2(1)^2 = 49 - 2 = 47 \end{aligned}$$

$$x^2 + 5x + 3 = 0 \xrightarrow{\alpha \text{ ریشه معادله است}} \alpha^2 + 5\alpha + 3 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = -3 - 5\alpha$$

$$(\alpha + 1)(\alpha + 5)(\alpha + 3) = (\alpha^2 + 6\alpha + 5)(\alpha + 3)$$

$$\xrightarrow{\alpha^2 = -3 - 5\alpha} (-3 - 5\alpha + 6\alpha + 5)(\alpha + 3) = (\alpha + 2)(\alpha + 3)$$

$$= \alpha^2 + 5\alpha + 6 \xrightarrow{\alpha^2 + 5\alpha = -3} -3 + 6 = 3$$

در معادله $9x^2 - 25ax + 4a = 0$ داریم $|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{1}{6}$ پس خواهیم داشت:

$$(|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}|)^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \Rightarrow x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2} = \frac{1}{36}$$

$$\xrightarrow{x_1 + x_2 = \frac{25a}{9}, x_1 x_2 = \frac{4a}{9}} \quad \frac{25a}{9} - 2\sqrt{\frac{4a}{9}} = \frac{1}{36} \Rightarrow 25a - 12\sqrt{a} = \frac{1}{4}$$

$$25a - 12\sqrt{a} - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 25}}{50} = \frac{12 \pm 13}{50}$$

با توجه به اینکه $\sqrt{a}$ عددی مثبت است پس داریم:

$$\sqrt{a} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{16}$$