

تمرین بعد از کلاس

به سبک استاد علی داودوندی رتبه ۶۱ کنکور



در هر قسمت ابتدا ۱ دقیقه خودتان فکر کنید اگه نتوانستید حل کنید ۱ دقیقه به کمک جزوه سوال را حل کنید و اگر باز هم نتوانستید در ۱ دقیقه پاسخنامه را بررسی کرده و سپس مسیر حل را به خودتان توضیح دهید. حل ویدیویی تمرین ها در آپارات و یوتیوب قرار گرفته است و به کمک **تایم لاین** می توانید هر سوال را پیدا کنید و حل آن را مشاهده کنید

 ALIDAVOODVANDI.IR

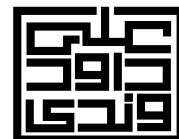
 [ALI.DAVOODVANDI](https://www.instagram.com/ALI.DAVOODVANDI)

 [ALI_DAVOODVANDI](https://www.youtube.com/ALI_DAVOODVANDI)

 [ALI_DAVOODVANDI](https://www.tiktok.com/ALI_DAVOODVANDI)

 ۰۹۳۸۳۱۶۵۳۵۴

 [ALI_DAVOODVANDI](https://www.telegram.me/ALI_DAVOODVANDI)



گزینه ۴

۱

می‌دانیم برای آنکه معادله دارای جواب حقیقی باشد، باید $\Delta \geq 0$ باشد، پس:
گزینه "۱":

$$x^2 + x - a = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \times (-a) \times 1 = 1 + 4a$$

این عبارت تنها در صورتی جواب حقیقی دارد که $a \geq \frac{-1}{4}$ باشد.
گزینه "۲":

$$x^2 + 2x + a = 0 \Rightarrow \Delta = 2^2 - 4(a)(1) = 4 - 4a$$

این عبارت تنها در صورتی جواب حقیقی دارد که $a \leq 1$ باشد.
گزینه "۳":

$$x^2 - ax + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = a^2 - 4(1)(1) = a^2 - 4$$

این عبارت تنها در صورتی جواب حقیقی دارد که $a \geq 2$ یا $a \leq -2$ باشد.
گزینه "۴":

$$x^2 - ax - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = a^2 - 4(-1)(1) = a^2 + 4$$

همواره $\Delta \geq 0$ است، بنابراین به ازای تمام مقادیر a ، معادله ریشه حقیقی دارد. پس گزینه "۴" صحیح است.

گزینه ۲

۲

عدد موردنظر را x می‌گیریم. حاصل ضرب x در خودش، برابر x^2 می‌باشد. سه برابر آن نیز $3x$ می‌شود. چون x^2 از $3x$ ، -10 واحد کمتر است، بنابراین $3x$ از x^2 ، -10 واحد بیش‌تر است:

$$3x - x^2 = -10 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x - 5)(x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 5 & \times \\ x = -2 & \checkmark \end{cases}$$

چون روی سؤال گفته شده عدد منفی، بنابراین $x = -2$ قابل قبول است.

مساحت مثلث قائم الزاویه برابر است با:

$$S = \frac{1}{2}(2x) \times (x+1) = x^2 + x$$

محیط مربعی به ضلع $2x - 1$ برابر است با: $P = 4(2x - 1)$
حال باتوجه به فرض صورت سؤال داریم:

$$S = P \Rightarrow x^2 + x = 4(2x - 1) \Rightarrow x^2 + x = 8x - 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x + 4 = 0 \xrightarrow{\text{مقایسه با فرم استاندارد } ax^2 + bx + c = 0} \begin{cases} a = 1 \\ b = -7 \\ c = 4 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-7)^2 - 4 \times (1) \times (4) = 49 - 16 = 33$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-(-7) + \sqrt{33}}{2 \times 1} = \frac{7 + \sqrt{33}}{2} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_2 = \frac{-(-7) - \sqrt{33}}{2 \times 1} = \frac{7 - \sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

پس ضلع مربع برابر است با:

$$(2x - 1) = 2\left(\frac{7 \pm \sqrt{33}}{2}\right) - 1 = 6 \pm \sqrt{33}$$

$x = -1$ جواب معادله است، پس در آن صدق می‌دهیم:

$$a(-1)^2 + 7(-1) + c = 0 \Rightarrow a + c = 7$$

حال حالات مختلف را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{matrix} a = 1 & a = 6 \\ c = 6 & c = 1 \end{matrix} \text{ یا } \Rightarrow a \times c = 6$$

$$\begin{matrix} a = 2 & a = 5 \\ c = 5 & c = 2 \end{matrix} \text{ یا } \Rightarrow a \times c = 10$$

$$\begin{matrix} a = 3 & a = 4 \\ c = 4 & c = 3 \end{matrix} \text{ یا } \Rightarrow a \times c = 12$$

پس ۱۲ بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای $a \times c$ است.

$$6x^2 - 3x = 5 \xrightarrow{\div 6} x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{5}{6}$$

مربع نصف ضریب x به طرفین معادله بالا اضافه می‌شود:

$$\left(\frac{-1}{2} \div 2\right)^2 = \left(\frac{-1}{2} \times \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

جعبه ابرار: معادله درجه دوم و رابطه به صورت نامتقارن

$$3x^2 - (3 - 2\sqrt{2})x - \sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = x_2 = 1 \\ \alpha = x_1 = -\frac{\sqrt{\lambda}}{3} \Rightarrow \alpha < \beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3\alpha + \beta = 3\left(-\frac{\sqrt{\lambda}}{3}\right) + 1 = 1 - \sqrt{\lambda}$$

چالش سؤال: مجموع ضرایب معادله درجه دوم برابر صفر است.

$$(x - 5)^2 = (1 + \sqrt{2})^2 \Rightarrow x - 5 = \pm(1 + \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} + 5 = 6 + \sqrt{2} \\ x = -1 - \sqrt{2} + 5 = 4 - \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = 6 + \sqrt{2} + 4 - \sqrt{2} = 10$$

$$mx^2 - 3x - 1 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow 9 + 4m = 0 \Rightarrow m = -\frac{9}{4}$$

$$\text{نسبت ریشه مضاعف} = \frac{3}{2m} = \frac{3}{2\left(-\frac{9}{4}\right)} = \frac{3}{-\frac{9}{2}} = -\frac{3 \times 2}{9} = -\frac{2}{3}$$

نسبت ریشه مضاعف به m برابر است با:

$$\frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{9}{4}} = \frac{8}{27}$$

روش اول: طرفین معادله داده شده را به ۳ تقسیم می‌کنیم. داریم:

$$x^2 - \frac{17}{3}x = \frac{20}{3}$$

مربع نصف ضریب x را به دو طرف اضافه می‌کنیم. داریم:

$$x^2 - \frac{17}{3}x + \frac{289}{36} = \frac{20}{3} + \frac{289}{36} \Rightarrow \left(x - \frac{17}{6}\right)^2 = \frac{529}{36}$$

پس $a = \frac{17}{6}$ و $b = \frac{529}{36}$ است و حاصل $\frac{57}{6} = \frac{9}{5}$ و $2a + \sqrt{b} = \frac{34}{6} + \frac{23}{6} = \frac{57}{6}$ می‌باشد.

روش دوم: در معادله $3x^2 - 17x - 20 = 0$ ، رابطه $a + c = b$ ، بین ضرایب برقرار است، پس ریشه‌های معادله به صورت $x = -1$ و $x = \frac{20}{3}$ هستند. حال معادله $(x - a)^2$ را حل می‌کنیم. داریم:

$$x - a = \pm\sqrt{b} \Rightarrow \begin{cases} x = a + \sqrt{b} \\ x = a - \sqrt{b} \end{cases}$$

ریشه کوچک‌تر باید -1 و ریشه بزرگ‌تر باید $\frac{20}{3}$ باشد، پس داریم:

$$\begin{cases} a + \sqrt{b} = \frac{20}{3} \\ a - \sqrt{b} = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} 2a = \frac{17}{3} \Rightarrow a = \frac{17}{6}$$

با جایگذاری $a = \frac{17}{6}$ در معادله اول داریم:

$$\frac{17}{6} + \sqrt{b} = \frac{20}{3} \Rightarrow \sqrt{b} = \frac{23}{6}$$

در نتیجه حاصل $\frac{57}{6} = \frac{9}{5}$ و $2a + \sqrt{b} = 2\left(\frac{17}{6}\right) + \frac{23}{6} = \frac{57}{6}$ است.

$$3x^2 + 4x + 5 = 0 \xrightarrow{\div 3} x^2 + \frac{4}{3}x = -\frac{5}{3}$$

نصف مربع ضریب x را به دو طرف اضافه می‌کنیم:

$$x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = -\frac{5}{3} + \frac{4}{9} \Rightarrow \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{11}{9}$$

ابتدا معادله $(3x - 1)^2 = 4$ را حل می‌کنیم:

$$(3x - 1)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 1 = 2 \\ 3x - 1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

حال برای آنکه $x = 1$ یا $x = -\frac{1}{3}$ جواب $x^2 - ax + a = 0$ باشند، باید در آن صدق کنند.

$$x = 1 \Rightarrow 1 - a + a = 0 \Rightarrow 1 = 0 \Rightarrow \text{غیرممکن}$$

$$x = -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{9} + \frac{1}{3}a + a = 0 \Rightarrow \frac{4}{3}a = -\frac{1}{9} \Rightarrow a = \frac{3}{4} \times -\frac{1}{9} = -\frac{1}{12}$$

جواب‌های معادله $A^2 = k$ به صورت $A = \sqrt{k}$, $A = -\sqrt{k}$ است:

$$(x^2 - a)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - a = 3 \\ x^2 - a = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = a + 3 \\ x^2 = a - 3 \end{cases}$$

نکته: معادله درجه دوم به صورت $(ax + b)^2 = k$ به ازای مقادیر مختلف k تعداد جواب‌های مختلفی دارد:

$$k > 0 \Rightarrow \text{دو جواب}$$

$$k = 0 \Rightarrow \text{یک جواب}$$

$$k < 0 \Rightarrow \text{بدون جواب}$$

پس باید $a + 3$ و $a - 3$ مثبت باشند:

$$\left. \begin{aligned} a + 3 > 0 &\Rightarrow a > -3 \\ a - 3 > 0 &\Rightarrow a > 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a > 3$$

اگر معادله درجه دوم $a'x^2 + b'x + c' = 0$ یک ریشه مضاعف داشته باشد، آنگاه ریشه مضاعف از رابطه $x = \frac{-b'}{2a'}$ به دست می‌آید.

$$x^2 + 2ax - 3b = 0 \Rightarrow \begin{cases} a' = 1 \\ b' = 2a \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{b'}{2a'} = -\frac{2a}{2 \times 1} = -a \Rightarrow -a = 4 \Rightarrow a = -4$$

$$\tan 60^\circ = \frac{-2m}{m^2 - 1} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{-2m}{m^2 - 1} \Rightarrow \sqrt{3}m^2 + 2m - \sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow |m_1 - m_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{4 + 12}}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

الف) دلتای هر دو معادله $b^2 - 4ac$ است و این عبارت درست است.

ب) اگر معادله اول دارای ریشه‌های مختلف‌العلامت باشد، یعنی ضرب ریشه‌های آن منفی است و $\frac{c}{a} < 0$ پس $\frac{a}{c} < 0$ و معادله دوم هم به همین صورت است، پس این عبارت هم درست است.

ج) در صورتی که معادلات تک ریشه‌ای باشند، ریشه معادله اول $-\frac{b}{2a}$ و ریشه معادله دوم $-\frac{b}{2c}$ است، پس این عبارت همواره صحیح نیست.

اگر $(x^2 - a)^2$ برابر صفر قرار گیرد، آنگاه جواب‌های معادله برابر $x^2 = a$ خواهند بود که اگر $a > 0$ ، ۲ جواب برای معادله به دست می‌آید.

پس باید $a^2 + a - 2 = 0$ و $a > 0$:

$$a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow (a - 1)(a + 2) = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ یا } a = -2$$

پس $a = 1$ پذیرفته است.

البته اگر $a^2 + a - 2 > 0$ آنگاه داریم:

$$(x^2 - a)^2 = a^2 + a - 2 \Rightarrow x^2 - a = \pm \sqrt{a^2 + a - 2} \Rightarrow x^2 = a \pm \sqrt{a^2 + a - 2}$$

که اگر بین $a + \sqrt{a^2 + a - 2}$ و $a - \sqrt{a^2 + a - 2}$ فقط یک کدام مثبت باشد، باز هم برای معادله ۲ جواب به وجود می‌آید، پس ضریب این دو عبارت باید منفی باشد:

$$(a - \sqrt{a^2 + a - 2})(a + \sqrt{a^2 + a - 2}) = a^2 - (a^2 + a - 2) = 2 - a$$

پس $2 - a < 0$ و $a > 2$ پذیرفته است.

باتوجه به معادله داده شده یکی از جواب‌ها برابر $x = 1$ است. اگر قرار باشد معادله جواب دیگری نداشته باشد باید $x^2 - ax + a = 0$ یا جواب نداشته باشد یا جواب مضاعف $x = 1$ داشته باشد.
حالت اول: اگر جواب نداشته باشد:

$$\Delta = (-a)^2 - 4(1)(a) < 0 \Rightarrow a^2 - 4a < 0 \\ \Rightarrow a(a - 4) < 0 \Rightarrow 0 < a < 4$$

حالت دوم: اگر جواب مضاعف $x = 1$ داشته باشد، در این حالت باید به شکل $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ باشد که ممکن نیست؛ پس در کل $0 < a < 4$ است.

اگر ریشه‌های معادله قرینه باشد، حاصل جمع‌شان صفر می‌شود. پس:

$$\Delta = (m - 2)^2 - 4(m - 3)(m - 1) \\ \Rightarrow \Delta = m^2 - 4m + 4 - 4m^2 + 12m - 12 + 16m \\ \Rightarrow \Delta = -3m^2 + 12m - 8 \\ x = \frac{-(m - 2) \pm \sqrt{-3m^2 + 12m - 8}}{2(m - 3)} \\ \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{-m + 2}{(m - 3)} = 0 \Rightarrow m = 2$$

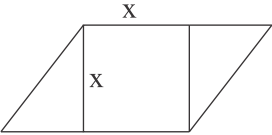
باتوجه به شکل، طول و عرض مستطیل رنگی به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \text{عرض} : 5 - \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = 5 - x \\ \text{طول} : 8 - x - x = 8 - 2x \end{cases}$$

عرض $\times$ طول = مساحت مستطیل

$$\text{مساحت قسمت رنگی} = (5 - x)(8 - 2x) \\ \Rightarrow 24 = (5 - x)(8 - 2x) \Rightarrow 24 = 40 - 10x - 8x + 2x^2 \\ \Rightarrow x^2 - 9x + 8 = 0$$

$$(x - 8)(x - 1) = 0 \xrightarrow{\text{از اتحاد جمله مشترک}} \begin{cases} x = 8 & \times \text{ غ.ق.ق} \\ x = 1 & \checkmark \text{ ق.ق} \end{cases} \Rightarrow \text{ابعاد منفی می‌شود.}$$



$$S_{\text{مربع}} = \frac{3}{4} S_{\text{مثلث}} + \frac{27}{32} \Rightarrow x^2 = \frac{3}{4} \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{27}{32}$$

$$\xrightarrow{\times 32} 32x^2 = 12x + 27 \Rightarrow 32x^2 - 12x - 27 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 144 + 4(32)(27) = 3600 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{12 \pm 60}{64} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{8} \\ x = \frac{12 - 60}{64} < 0 \Rightarrow \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

$$\text{اندازه قاعده} = x + 1 = \frac{9}{8} + 1 = \frac{17}{8}$$

اگر تفاضل ریشه‌ها صفر باشد، آنگاه معادله دارای ریشه مضاعف است، پس Δ صفر می‌باشد. در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ برابر است با:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$8x^2 - bx + 2 = 0$$

$$\Delta = (-b)^2 - 4(8)(2) = 0 \Rightarrow b^2 - 64 = 0 \Rightarrow b^2 = 64 \Rightarrow b = \pm 8$$

طبق سؤال: $b = 8$

مراحل مربع کامل سازی به صورت زیر است:

(۱) جملات شامل متغیر (مجهول x) را به سمت چپ تساوی و عدد ثابت را به سمت راست تساوی می‌بریم.

(۲) در صورت یک نبودن ضریب جمله درجه دوم، تمام جملات را بر آن تقسیم می‌کنیم.

(۳) نصف ضریب x را به توان دو رسانده و به طرفین اضافه می‌کنیم.

(۴) سمت چپ را با استفاده از اتحاد مربع تجزیه می‌کنیم.

$$-3x^2 + 4x + 15 = 0 \Rightarrow -3x^2 + 4x = -15 \xrightarrow{\div(-3)} x^2 - \frac{4}{3}x = 5$$

$$\xrightarrow{+(\frac{4}{3})} x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = 5 + \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{49}{9} \xrightarrow{\text{باتوجه به صورت سؤال}} m = \frac{49}{9} \Rightarrow \sqrt{m} = \frac{7}{3}$$

$$(x-2)^2 = (2x-1)^2 \Rightarrow x-2 = \pm(2x-1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2x-1+2 = 2x+1 \\ x = -2x+1+2 = -2x+3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{مجموع جوابها}} 1-1 = 0$$

اگر تعداد تیم‌ها را x در نظر بگیریم، هر تیم با $x-1$ تیم دیگر بازی می‌کند. پس $\frac{x(x-1)}{2}$ بازی در رفت و $\frac{x(x-1)}{2}$ بازی در برگشت برگزار می‌شود. در مجموع $x(x-1)$ بازی در رفت و برگشت برگزار می‌شود:

$$x(x-1) = 42 \Rightarrow x^2 - x - 42 = 0 \Rightarrow (x-7)(x+6) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = -6 \end{cases} \text{ غ.ق.ق}$$

$$x^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{b=c+1} x^2 + (c+1)x + c = 0$$

اتحاد جمله مشترک : $(x+1)(x+c) = 0$

$$\begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x+c=0 \Rightarrow x=-c \end{cases}$$

می‌توان با استفاده از روش تجزیه معادله را حل کرد:

$$x^{2\sqrt{2}} - 5x^{\sqrt{2}} + 6 = 0 \Rightarrow (x^{\sqrt{2}} - 2)(x^{\sqrt{2}} - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^{\sqrt{2}} - 3 = 0 \Rightarrow x^{\sqrt{2}} = 3 \Rightarrow x = 3^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ x^{\sqrt{2}} - 2 = 0 \Rightarrow x^{\sqrt{2}} = 2 \Rightarrow x = 2^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \end{cases}$$

چون خط عمودی $x = 1$ از رأس سهمی می‌گذرد، پس محور تقارن سهمی است. پس:

$$\frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2$$

چون خط از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس عرض از مبدأ آن صفر است:

$$-3b + 1 = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{3}$$

پس ضابطه سهمی به صورت $y = x^2 - 2x$ است.

کمترین مقدار سهمی در رأس سهمی اتفاق می‌افتد و برابر است با:

$$\xrightarrow{x=1} y = 1^2 - 2 \times 1 = -1$$

طول رأس سهمی $y = ax^2 + b + c$ از رابطه $x_s = -\frac{b}{2a}$ به دست می‌آید:

$$x_s = -2 \Rightarrow -\frac{-a}{2(-3)} = -2 \Rightarrow a = 12 \Rightarrow y = -3x^2 - 12x - b$$

$$\xrightarrow{\text{سهمی از نقطه } (-3, 0) \text{ عبور می‌کند.}} 0 = -3(-3)^2 - 12(-3) - b$$

$$\Rightarrow b = 9 \Rightarrow b - a = 9 - 12 = -3$$

چون رأس سهمی بر محور x ها قرار دارد، بنابراین عرض رأس سهمی برابر صفر است؛ یعنی اگر $x = -\frac{b}{2a}$ که طول رأس سهمی است را در معادله قرار دهیم، باید برابر صفر شود.

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2(3k+4)} = \frac{1}{3k+4}$$

$$x = \frac{1}{3k+4} \text{ را در معادله قرار می‌دهیم:}$$

$$(3k+4)\left(\frac{1}{3k+4}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3k+4}\right) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3k+4} - \frac{2}{3k+4} = -1 \Rightarrow \frac{-1}{3k+4} = -1$$

$$\Rightarrow 3k+4 = 1 \Rightarrow 3k = -3 \Rightarrow k = -1$$

محور تقارن سهمی $y = ax^2 + bx + c$ خط $x = -\frac{b}{2a}$ است. در نتیجه:

$$-\frac{-(k+2)}{2 \times 2} = 3 \Rightarrow k+2 = 12 \Rightarrow k = 10$$

$$y = 2x^2 - 12x - c \xrightarrow{(0,-1)} -1 = 2 \times 0 - 12 \times 0 - c \Rightarrow c = 1$$

$$\Rightarrow y = 2x^2 - 12x - 1$$

چون دهانه سهمی روبه بالا باز می‌شود، کمترین مقدار سهمی روی محور تقارن سهمی (رأس سهمی) قرار دارد، بنابراین:

$$\xrightarrow{x=3} y = 2 \times (3)^2 - 12(3) - 1 = 18 - 36 - 1 = -19$$

ضریب x^2 عددی مثبت است، پس کمترین مقدار تابع درجه دوم، همان عرض رأس سهمی است، بنابراین ابتدا طول رأس سهمی را حساب کرده، آن را به جای x می‌گذاریم تا عرض رأس سهمی نیز به دست آید:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(8)} = \frac{1}{4}$$

$$y_S = 8\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{4}\right) + 1 = 8\left(\frac{1}{16}\right) - 1 + 1 = \frac{1}{2}$$

مختصات رأس سهمی را به دست می‌آوریم:

$$y = -2kx^2 - kx + 3k - 1$$

$$\xrightarrow[\text{مقایسه با فرم استاندارد}]{y=ax^2+bx+c} \begin{cases} a = -2k \\ b = -k \\ c = 3k - 1 \end{cases}$$

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-k)}{2(-2k)} = \frac{k}{-4k} = -\frac{1}{4} \Rightarrow x_S = -\frac{1}{4}$$

$$y_S = -2k\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - k\left(-\frac{1}{4}\right) + 3k - 1 = -\frac{k}{4} + \frac{k}{4} + 3k - 1 = \frac{25}{4}k - 1$$

چون رأس سهمی روی نیمساز ناحیه اول و سوم قرار دارد، در این حالت طول و عرض رأس برابرند، یعنی $x_S = y_S$ است، پس داریم:

$$y_S = x_S \Rightarrow \frac{25}{4}k - 1 = -\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{25}{4}k = \frac{3}{4} \Rightarrow k = \frac{6}{25}$$

x را بر حسب y می‌نویسیم:

$$\frac{x}{3} + 2y = 12 \Rightarrow \frac{x}{3} = 12 - 2y \Rightarrow x = -6y + 36$$

پس xy برابر است با:

$$xy = (-6y + 36)(y) = -6y^2 + 36y$$

ماکزیم عبارت درجه دوم بالا را حساب می‌کنیم:

$$y_{\max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-36}{-12} = 3$$

$$\Rightarrow xy \text{ بیشترین مقدار} = -6(3)^2 + 36(3) = 54$$

معادله سهمی با رأس (α, β) به صورت $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ است.

باتوجه به شکل $\alpha = 3$ ، $y(0) = -\frac{5}{2}$ و $y(5) = 0$ است، پس داریم:

$$y(0) = -\frac{5}{2} \Rightarrow a(0 - 3)^2 + \beta = -\frac{5}{2} \Rightarrow 9a + \beta = -\frac{5}{2} \quad (1)$$

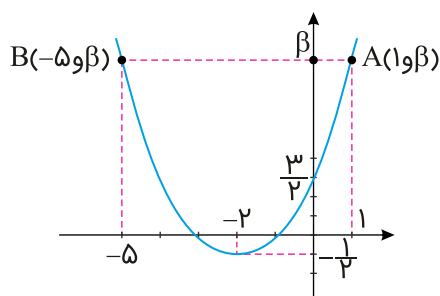
$$y(5) = 0 \Rightarrow a(5 - 3)^2 + \beta = 0 \Rightarrow 4a + \beta = 0 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} a = -\frac{1}{2}, \beta = 2$$

نکته: معادله کلی سهمی به صورت $y = a(x - x_s)^2 + y_s$ است که در آن (x_s, y_s) رأس سهمی است.

باتوجه به اطلاعات صورت تست، شکل سهمی به صورت زیر است:

$$x_s = \frac{-5 + 1}{2} = -2 \Rightarrow f(x) = a(x + 2)^2 - \frac{1}{2}$$



$$(0, \frac{3}{2}) \in f(x) \Rightarrow \frac{3}{2} = a(0 + 2)^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$(1, 2) \in f(x) \Rightarrow 2 = \frac{1}{2}(1 + 2)^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow 2 = 2 - \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Contradiction}$$

به ازای $m < 0$ نمودار قطعاً از نواحی سوم و چهارم می‌گذرد.

$m = 0$ مورد قبول است.

به ازای $m > 0$ یک سهمی داریم که کافی است عرض رأس آن نامنفی باشد.

$$\frac{-\Delta}{4a} \geq 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{4m} \leq 0 ; m > 0 \Rightarrow \Delta \leq 0 \Rightarrow 9m^2 - 16m \leq 0$$

$$\Rightarrow m(9m - 16) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq m \leq \frac{16}{9} \Rightarrow m = 1$$

جعبه ابزار: $\Delta < 0$ و $k < 0$

چون سهمی محور x ها را قطع نمی‌کند، پس معادله $kx^2 + kx - \frac{1}{p} = 0$ جواب ندارد یعنی $\Delta < 0$ و از طرفی باید دهانه سهمی رو به پایین باشد؛ یعنی $k < 0$

$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ k < 0 \end{cases} \Rightarrow k^2 + 2k < 0 \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} k \in (-2, 0)$$

چالش سؤال: سهمی زیر محور x ها یعنی سهمی محور x ها را قطع نمی‌کند پس معادله $kx^2 + kx - \frac{1}{p} = 0$ جواب ندارد؛ یعنی $\Delta < 0$ و $k < 0$.

جعبه ابزار: نوشتن معادله یک سهمی

$$y = a(x - \alpha)^2 + \beta \Rightarrow y = a(x - 2)^2 + 18$$

$$\text{روی سهمی } M(1, 16) \Rightarrow 16 = a(1 - 2)^2 + 18$$

پس: $a = -2$

$$\Rightarrow \text{معادله سهمی: } y = -2(x - 2)^2 + 18$$

$$\Rightarrow y = -2(x^2 - 4x + 4) + 18 \Rightarrow y = -2x^2 + 8x + 10$$

$$\Rightarrow a = -2, b = 8, c = 10 \Rightarrow a + b + c = 16$$

چالش سؤال: هر نقطه از سهمی در معادله آن صدق می‌کند.

محور تقارن‌های دو سهمی با هم برابرند:

$$\frac{-a}{2 \times 1} = \frac{2}{2 \times (-1)} \Rightarrow a = 2$$

دو سهمی در نقطه‌ای به عرض ۱ یکدیگر را قطع می‌کنند (طول یکسان دارند)، پس:

$$1 = x^2 + 2x - 2 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$1 = -x^2 - 2x + b \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow b = 4 \\ x = -3 \Rightarrow b = 4 \end{cases}$$

بنابراین $ab = 8$ خواهد بود.

$$a = -1/\Delta c \Rightarrow a = -\frac{2}{\gamma}c \Rightarrow c = -\frac{\gamma}{2}a \quad (1)$$

$$y = ax + b \xrightarrow{(-2,0)} 0 = -2a + b \Rightarrow b = 2a$$

$$y = cx + d \xrightarrow{(-2,0)} 0 = -2c + d \Rightarrow d = 2c \xrightarrow{(1)} d = -\frac{4}{\gamma}a$$

$$f(x) = \left(\frac{c}{\gamma}x + d\right)^2 - (ax + b)^2 \xrightarrow{c=-\frac{\gamma}{2}a, d=-\frac{4}{\gamma}a, b=2a} f(x) = \left(-\frac{1}{2}ax - \frac{4}{\gamma}a\right)^2 - (ax + 2a)^2$$

$$f(x) = \frac{1}{4}a^2x^2 - a^2x^2 + \frac{4}{\gamma}a^2x - 4a^2x + \underbrace{\frac{16}{\gamma}a^2 - 4a^2}_{c'}$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{4}a^2 - a^2\right)x^2 + \left(\frac{4}{\gamma}a^2 - 4a^2\right)x + c'$$

$$x_{\text{اوج}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-\frac{4}{\gamma}a^2}{-\frac{16}{\gamma}a^2} = -\frac{\gamma}{4}$$

برای به دست آوردن مختصات برخورد دو سهمی، معادلات آن‌ها را باهم برابر قرار می‌دهیم تا طول نقطه برخورد به دست آید، سپس این مقدار به دست آمده را در یکی از سهمی‌ها جایگذاری می‌کنیم تا عرض نقطه برخورد به دست آید:

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x + 4 \\ y = -x^2 + 5x - 4 \end{cases}$$

$$x^2 - 3x + 4 = -x^2 + 5x - 4 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 8 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\xrightarrow[\text{دوجمله‌ای}]{\text{اتحاد مربع}} (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

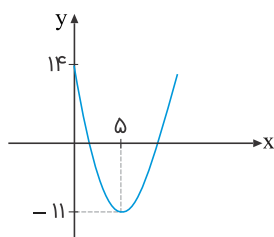
$$y = -x^2 + 5x - 4 \xrightarrow{x=2} y = -(2)^2 + 5(2) - 4 = -4 + 10 - 4 = 2$$

$\Rightarrow$ مختصات برخورد $(2, 2)$

$$y = x^2 - 10x + 14 \xrightarrow{y=ax^2+bx+c} \begin{cases} a = 1 \\ b = -10 \\ c = 14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{رأس سهمی} \begin{cases} x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-10)}{2 \times 1} = 5 \\ \xrightarrow{x=5} y = -11 \end{cases} \Rightarrow S(5, -11)$$

باتوجه به اینکه $a > 0$ ، دهانه سهمی روبه بالا است، سهمی را رسم می‌کنیم. باتوجه به اینکه $c = 14$ (عرض از مبدأ) سهمی از ناحیه سوم عبور نمی‌کند.



اگر در معادله سهمی $a > 0$ باشد، سهمی در نقطه رأس خود دارای کمترین مقدار است.

$$\text{طول رأس سهمی} : x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x = -\frac{-b}{10} = \frac{b}{10}$$

$$\xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{در معادله جاگذاری}} 2 = 5\left(\frac{b}{10}\right)^2 - b\left(\frac{b}{10}\right) + 7 \Rightarrow 2 = \frac{b^2}{20} - \frac{b^2}{10} + 7$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{20} - \frac{b^2}{10} = -5 \Rightarrow \frac{b^2(1-2)}{20} = -5 \Rightarrow \frac{-b^2}{20} = -5 \Rightarrow b^2 = 100 \Rightarrow b = \pm 10$$

$$y = (2x + a)^2 - 2x = 4x^2 + 4ax + a^2 - 2x = 4x^2 + (4a - 2)x + a^2$$

می‌دانیم محور تقارن $y = ax^2 + bx + c$ برابر با $x = \frac{-b}{2a}$ است؛ پس محور تقارن $y = 4x^2 + (4a - 2)x + a^2$ برابر با $x = \frac{-b}{2a}$ است با:

$$\frac{-(4a - 2)}{2(4)} = 1 \Rightarrow -4a + 2 = 8 \Rightarrow -4a = 6 \Rightarrow a = \frac{-3}{2}$$

محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع کرده است پس $f(1) = 0$ است. محور عرض‌ها را در -6 قطع کرده است پس $f(0) = -6$ و از نقطه $(-2, -6)$ عبور کرده است پس $f(-2) = -6$ ، حال داریم:

$$f(0) = -6 \Rightarrow 0 + 0 + c = -6 \Rightarrow c = -6$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow a + b - 6 = 0 \Rightarrow a + b = 6 \quad (1)$$

$$f(-2) = -6 \Rightarrow 4a - 2b + c = -6 \xrightarrow{c=-6} 4a - 2b = 0 \xrightarrow{\div 2} 2a = b$$

$$\xrightarrow{(1)} a + 2a = 6 \Rightarrow 3a = 6$$

$$\Rightarrow a = 2, b = 4 \Rightarrow f(x) = 2x^2 + 4x - 6 \Rightarrow f(-1) = 2 - 4 - 6 = 2 - 10 = -8$$

چون تابع مینیمم دارد، سهمی رو به بالا بوده و $m > 0$ است.
مینیمم سهمی در رأس آن اتفاق می‌افتد:

$$\text{رأس سهمی} = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right)$$

$$y_{\min} = \frac{-\Delta}{4a} = 2 \Rightarrow \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(m(5m - 1)) - 144}{4m} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{5m^2 - m - 36}{m} = 2 \Rightarrow 5m^2 - 3m - 36 = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(5)(-36)}}{10} = \frac{3 \pm 27}{10}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 3 & \text{قق} \\ m = \frac{-12}{5} < 0 & \text{غقق} \end{cases}$$

پس $m = 3$ قابل قبول و معادله به شکل زیر است:

$$y = 3x^2 - 12x + 14$$

محور تقارن سهمی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{12}{2 \times 3} = 2 \Rightarrow x = 2$$

$$3x^2 + (2m - 1)x + m + \frac{4}{3} = -x \xrightarrow{\text{مماس هستند}} 3x^2 + 2mx + m + \frac{4}{3} = 0$$

حتماً معادله فوق باید ریشه مضاعف داشته باشد، پس $\Delta = 0$ خواهد بود و داریم:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (2m)^2 - 4(3)\left(m + \frac{4}{3}\right) = 0 \Rightarrow 4m^2 - 4(3)\left(m + \frac{4}{3}\right) = 0$$

$$\xrightarrow{\div 4} m^2 - 3\left(m + \frac{4}{3}\right) = 0 \Rightarrow m^2 - 3m - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 & \times \\ m = 4 & \checkmark \end{cases}$$

به ازای $m = -1$ ، محل برخورد دو تابع در ناحیه دوم قرار نخواهد گرفت و $m = 4$ قابل قبول است.

$$y = 3x^2 + 7x + \frac{16}{3} \Rightarrow \text{رأس سهمی} = \frac{-b}{2a} = \frac{-7}{6}$$

طول رأس سهمی $y = -ax^2 + ax + 2$ برابر است با:

$$x_S = \frac{-a}{-2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2 + \frac{a}{4}$$

طول رأس سهمی $y = 2bx^2 - bx - 1$ برابر است با:

$$x_S = \frac{b}{4b} = \frac{1}{4} \Rightarrow y = -1 - \frac{b}{4}$$

معادله سهمی به صورت $y = ax^2 + bx + c$ می‌باشد. چون محل تقاطع سهمی با محور y ها برابر ۳- می‌باشد، بنابراین $c = -3$ است، از طرفی نقطه رأس سهمی برابر $(\frac{1}{2}, 2 + \frac{a}{4})$ را در تابع دیگر صدق می‌دهیم:

$$(\frac{1}{2}, 2 + \frac{a}{4}) \Rightarrow 2 + \frac{a}{4} = \frac{b}{2} - \frac{b}{2} - 1 \Rightarrow a = -12$$

معادله سهمی به صورت $y = ax^2 + bx + c$ می‌باشد. چون محل تقاطع سهمی با محور y ها برابر ۳- می‌باشد، بنابراین $c = -3$ است، از طرفی نقطه رأس سهمی برابر $(\frac{1}{4}, -1 - \frac{b}{4})$ را در تابع دیگر صدق می‌دهیم:

$$(12) \times \frac{1}{16} + (-12)(\frac{1}{4}) + 2 = -1 - \frac{b}{4} \Rightarrow b = -6$$

$$b - a = -6 - (-12) = 6$$

معادله سهمی به صورت $y = ax^2 + bx + c$ می‌باشد. چون محل تقاطع سهمی با محور y ها برابر ۳- می‌باشد، بنابراین $c = -3$ است، از طرفی نقطه رأس سهمی برابر $(2, 1)$ می‌باشد که در معادله صدق می‌کند:

$$1 = 4a + 2b - 3 \Rightarrow 4a + 2b = 4 \quad (1)$$

$$\text{طول رأس سهمی} : x = -\frac{b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -4a \quad (2)$$

$$\xrightarrow[\text{جاگذاری می‌کنیم}]{(2) \text{ را در } (1)} 4a + 2(-4a) = 4 \Rightarrow a = -1$$

بنابراین داریم:

$$b = -4a = -4(-1) = 4 \Rightarrow y = -x^2 + 4x - 3$$

مفهوم سؤال این است که رأس سهمی روی یکی از دو خط $y = x$ یا $y = -x$ واقع است. یعنی مختصات رأس سهمی به صورت (α, α) یا $(\alpha, -\alpha)$ است. باتوجه به معادله سهمی می‌توانیم طول رأس سهمی را حساب کنیم:

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4k}{2k} = 2 \Rightarrow y_s = \pm 2 \Rightarrow k(2)^2 - 4k(2) + 6 = \pm 2$$

$$4k - 8k + 6 = \pm 2 \Rightarrow -4k + 6 = \pm 2$$

$$\Rightarrow -4k + 6 = 2 \text{ یا } -4k + 6 = -2 \Rightarrow k = 1 \text{ یا } 2$$

$$\Rightarrow k \text{ مجموع مقادیر } k = 1 + 2 = 3$$

محور تقارن $y = ax^2 + bx + c$ به صورت $x = \frac{-b}{2a}$ است:

$$y = ax^2 + 3x + c \Rightarrow \text{محور تقارن} = x = \frac{-3}{2a} = -1 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

عرض رأس سهمی $y = 1$ است؛ پس $S(-1, 1)$ در تابع صدق می‌کند:

$$y = \frac{3}{2}x^2 + 3x + c \xrightarrow{S(-1,1)} 1 = \frac{3}{2} - 3 + c \Rightarrow c = \frac{5}{2}$$

$$ac = \frac{3}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{4} = 3.75$$

(۱) عرض از مبدأ برابر ۱ است، پس $c = 1$ می‌شود.

(۲) سهمی روبه بالا است، درنتیجه $m > 0$ می‌باشد.

(۳) طول رأس سهمی مثبت است، پس:

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{m-3}{\underbrace{2m}_{\text{مثبت}}} > 0 \Rightarrow m-3 < 0 \Rightarrow m < 3$$

(۴) تابع بر محور x ها مماس است. بنابراین:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (m-3)^2 - 4m(1) = 0 \Rightarrow m^2 - 6m + 9 - 4m = 0$$

$$m^2 - 10m + 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 9 \end{cases}$$

از اشتراک بین شروط ۲، ۳ و ۴ فقط $m = 1$ قابل قبول است.

دو تابع را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$x^2 + 4x + a = x^2 + 3x + 2 \Rightarrow x = 2 - a$$

$2 - a$ صفر مشترک دو تابع است.

$$(2 - a)^2 + 3(2 - a) + 2 = 0 \Rightarrow a^2 - 7a + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = 4 \end{cases}$$

مجموع مقادیر به دست آمده ۷ است.

نکته: رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ از رابطه $S(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ به دست می‌آید.
بنابراین با استفاده از نکته بالا رأس سهمی را به دست می‌آوریم:

$$y = ax^2 + 2x + b$$

$$\text{طول رأس سهمی: } \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2a} = \frac{-1}{a}$$

$$\text{عرض رأس سهمی: } \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow \Delta = (2)^2 - 4(a)(b) = 4 - 4ab$$

$$\Rightarrow \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-4 + 4ab}{4a} = \frac{-1 + ab}{a}$$

بنابراین رأس سهمی به صورت $(\frac{-1}{a}, \frac{-1 + ab}{a})$ است. از طرفی چون رأس سهمی در ناحیه اول مختصات قرار دارد، بنابراین:

$$\frac{-1}{a} > 0 \Rightarrow a < 0 \quad (*)$$

$$\frac{-1 + ab}{a} > 0 \xrightarrow{(*)} -1 + ab < 0 \Rightarrow ab < 1$$

نکته: مختصات رأس سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ به صورت $(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ است.

باتوجه به اینکه سهمی و خط در دو نقطه به طول‌های ۲ و ۸ متقاطع‌اند، بنابراین این دو نقطه در معادله خط و سهمی صدق می‌کنند. ابتدا با استفاده از معادله خط مقدار y هر دو نقطه را به دست آورده، سپس با جایگذاری در معادله سهمی مقادیر a و b را به دست می‌آوریم.
بنابراین داریم:

$$y = 13 - x$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 13 - 2 = 11 \Rightarrow (2, 11)$$

$$x = 8 \Rightarrow y = 13 - 8 = 5 \Rightarrow (8, 5)$$

این دو نقطه در معادله سهمی صدق می‌کنند:

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + ax + b$$

$$(2, 11) : 11 = -\frac{1}{2}(2)^2 + a(2) + b \Rightarrow 2a + b = 13 \quad (*)$$

$$(8, 5) : 5 = -\frac{1}{2}(8)^2 + a(8) + b \Rightarrow 8a + b = 37 \quad (**)$$

دو معادله و دو مجهول داریم؛ پس مقادیر a و b را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 2a + b = 13 \\ 8a + b = 37 \end{cases} \xrightarrow{-} 6a = 24 \Rightarrow a = 4 \quad (1)$$

$$a = 4 \Rightarrow 2(4) + b = 13 \Rightarrow b = 13 - 8 = 5 \Rightarrow b = 5 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x + 5 \Rightarrow x_s = \frac{-4}{2(-\frac{1}{2})} = \frac{-4}{-1} = 4$$

برای محاسبه y_s هم می‌توان از فرمول نکته استفاده کرد و هم در معادله سهمی جایگذاری کرد:

$$y_s = -\frac{1}{2}(4)^2 + 4(4) + 5 = -8 + 16 + 5 = 13$$

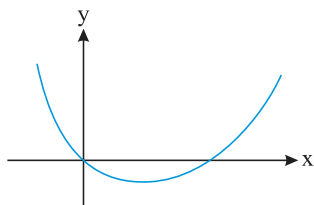
بنابراین نقطه $(4, 13)$ رأس سهمی است.

حالت اول: یک ریشه و یک عرض از مبدأ، پس باید $\Delta = 0$:

$$\Delta = m^2 - 4(1)(m - \frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 2 = 0$$

این معادله دارای $\Delta > 0$ و درنتیجه دو مقدار برای m وجود دارد.

حالت دوم: اگر $c = 0$ آنگاه نمودار شبیه شکل زیر می‌شود:



$$c = 0 \Rightarrow m - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

جواب‌های حالت اول و دوم یکسان نیستند؛ درنتیجه ۳ جواب برای m وجود دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه "۱": چون تابع مینیمم دارد پس باید $a > 0$ باشد.

گزینه "۲": محور تقارن سمت راست است پس باید a و b غیرهم‌علامت باشند.

گزینه "۳":

$$S \Big|_{-1}^2 : \Rightarrow y = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow -1 = (2)^2 - 4(2) + 4$$

$$\Rightarrow -1 = 4 - 8 + 4 \Rightarrow -1 = 0$$

نقطه سر به سر در زمانی رخ می‌دهد که $R(x) = C(x)$ ؛ درآمد این شرکت به صورت $R(x) = 13x$ است.

$$R(x) = C(x) \Rightarrow 40 + x^2 = 13x \Rightarrow x^2 - 13x + 40 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 8)(x - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 8 \end{cases}$$

نمودار سهمی از نقطه $(0, 1)$ عبور می‌کند. مختصات این نقطه را در تابع جایگذاری می‌کنیم:

$$1 = a(0)^2 + b(0) + c \Rightarrow c = 1 \Rightarrow y = ax^2 + bx + 1$$

طول رأس سهمی که از رابطه $x = -\frac{b}{2a}$ به دست می‌آید را با طول رأس نمودار یعنی $x = 2$ مساوی قرار می‌دهیم.

$$x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow -\frac{b}{2a} = 2 \Rightarrow -b = 4a \Rightarrow 4a + b = 0$$

رأس نمودار، نقطه $(2, -7)$ می‌باشد. مختصات این نقطه را در تابع جایگذاری می‌کنیم.

$$y = ax^2 + bx + 1 \Rightarrow a(2)^2 + b(2) + 1 = -7 \Rightarrow 4a + 2b = -8$$

معادلات به‌دست‌آمده را در یک دستگاه دو معادله با دو مجهول حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} 4a + b = 0 \xrightarrow{\times(-1)} -4a - b = 0 \\ 4a + 2b = -8 \end{cases} \Rightarrow b = -8$$

$b = -8$ را در یکی از معادلات جایگذاری نموده، a را به دست می‌آوریم.

$$4a + (-8) = 0 \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2$$

اکنون می‌توانیم $a \times b \times c$ را محاسبه کنیم.

$$a \times b \times c = 2 \times -8 \times 1 = -16$$

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر α و β ریشه‌ها باشند، می‌توان معادله را به صورت $a(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ نوشت. پس:

$$2x^2 + (2a + 1)x + 3b = 2(x - 2)(x + 3)$$

$$= 2(x^2 + x - 6) = 2x^2 + 2x - 12$$

$$\begin{cases} 2a + 1 = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \\ 3b = -12 \Rightarrow b = -4 \end{cases} \Rightarrow a \times b = \frac{1}{2} \times (-4) = -2$$

باید سهمی و خط نقطه برخوردی نداشته باشند.



$$\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + \frac{k}{2} = 3 - x \xrightarrow{\times 6} 3x^2 - 2x + 3k = 18 - 6x$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 4x + 3k - 18 = 0$$

$$\Delta = (4)^2 - 4(3)(3k - 18) < 0 \Rightarrow 12(3k - 18) > 16 \Rightarrow 3k - 18 > \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow 3k > 18 + \frac{4}{3} \Rightarrow k > 6 + \frac{4}{9} \Rightarrow k > 6\frac{4}{9}$$

میانگین ریشه‌ها در تابع درجه دو، برابر با طول رأس سهمی است. از طرف دیگر کمترین مقدار تابع درجه دو همان عرض رأس سهمی است. پس منظور از برابری این دو مقدار باهم، درواقع برابری طول و عرض رأس سهمی است. کمترین مقدار سهمی زمانی اتفاق می‌افتد که ضریب x^2 بزرگتر از صفر باشد. ($m > 0$)

$$x_{\text{رأس}} = \frac{-b}{2a} = \frac{\lambda}{2(m)} = \frac{4}{m}$$

$$y_{\text{رأس}} = f\left(\frac{4}{m}\right) = m\left(\frac{4}{m}\right)^2 - \lambda\left(\frac{4}{m}\right) + m + \lambda = \frac{16}{m} - \frac{32}{m} + m + \lambda = \frac{-16}{m} + m + \lambda$$

$$x_{\text{رأس}} = y_{\text{رأس}} \Rightarrow \frac{4}{m} = \frac{-16}{m} + m + \lambda \Rightarrow \frac{20}{m} = m + \lambda$$

با ضرب طرفین معادله در m داریم:

$$20 = m^2 + \lambda m \Rightarrow m^2 + \lambda m - 20 = 0 \Rightarrow m = 2, -10$$

$m = -10$ غیرقابل قبول است.

به ازای $m = 2$ ، تابع به صورت $y = 2x^2 - \lambda x + 10$ درمی‌آید و محور تقارن آن که همان خط قائم گذرنده از رأس سهمی است، به صورت $x_{\text{رأس}} = \frac{-b}{2a} = \frac{\lambda}{4} = 2$ خواهد بود و عرض تلاقی آن با نمودار تابع $y = 3x^2 + 2x - 1$ برابر است با:

$$3(2)^2 + 2(2) - 1 = 15$$

هر سهمی حتماً محور y ها را در یک نقطه قطع می‌کند:

$$f(0) = b \Rightarrow A(0, b)$$

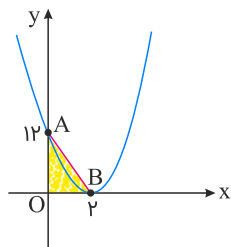
پس این سهمی، محور x ها را فقط در یک نقطه باید قطع کند.

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 12b = 0 \Rightarrow b = 0, 12$$

اگر $b = 0$ باشد، سهمی به صورت $f(x) = 3x^2$ در می‌آید و این سهمی فقط در مبدأ با محورهای مختصات برخورد دارد، پس این حالت رد می‌شود.
با جایگذاری $b = 12$ داریم:

$$f(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x - 2)^2$$

شکل سهمی را می‌کشیم:



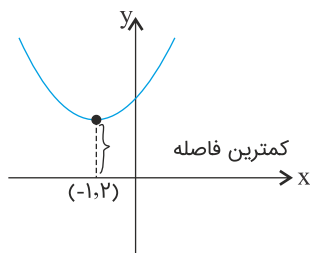
$$S = \frac{12 \times 2}{2} = 12 \text{ مساحت مثلث OAB برابر است با: } 12$$

اول: در این منحنی $\Delta < 0$ است. بنابراین نمودار آن را به صورت تقریبی رسم می‌کنیم.

دوم: مختصات رأس سهمی را از رابطه $(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ به دست می‌آوریم:

$$\text{رأس سهمی} = \left(\frac{-2}{2 \times 1}, -\frac{-8}{4}\right) = (-1, 2)$$

سوم: مطابق شکل کمترین فاصله منحنی از محور x ها برابر با ۲ است.



$$\begin{cases} \alpha < \frac{9}{2} \Rightarrow \alpha - \frac{9}{2} < 0 \Rightarrow 2\alpha - 9 < 0 \\ \beta < \frac{9}{2} \Rightarrow \beta - \frac{9}{2} < 0 \Rightarrow 2\beta - 9 < 0 \end{cases}$$

$$(2\alpha - 9)(2\beta - 9) > 0 \Rightarrow 4\alpha\beta - 18(\alpha + \beta) + 81 > 0$$

$$\Rightarrow 4(-m) - 18(\omega) + 81 > 0 \Rightarrow 4m < -9 \Rightarrow m < \frac{-9}{4} \quad (1)$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow 2\omega + 4m > 0 \Rightarrow 4m > -2\omega \Rightarrow m > \frac{-2\omega}{4} \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) : \frac{-2\omega}{4} < m < \frac{-9}{4} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-6, -5, -4, -3\}$$

حاصل ضرب ریشه‌ها ($P = \frac{c}{a}$) باید مثبت و حاصل جمع ریشه‌ها ($S = \frac{-b}{a}$) باید منفی باشد:

$$P = \frac{1-2a}{a} > 0, \quad S = \frac{-(1-a)}{a} = \frac{a-1}{a} < 0 \quad (*)$$

همچنین باید $\Delta > 0$ باشد:

$$\Delta = (1-a)^2 - 4(a)(1-2a) = a^2 - 2a + 1 - 4a + 8a = 5a^2 - 6a + 1$$

$$= 9a^2 - 6a + 1 = (3a-1)^2 > 0; a \neq \frac{1}{3} \quad (**)$$

$$\text{گزینه ۱: } a = -\frac{1}{4} \Rightarrow S = \frac{(-\frac{1}{4}) - 1}{(-\frac{1}{4})} > 0, \quad P = \frac{1 - 2(-\frac{1}{4})}{(-\frac{1}{4})} < 0 \quad \times$$

$$\text{گزینه ۲: } a = \frac{5}{6} \Rightarrow S = \frac{(\frac{5}{6}) - 1}{(\frac{5}{6})} < 0, \quad P = \frac{1 - 2(\frac{5}{6})}{(\frac{5}{6})} < 0 \quad \times$$

$$\text{گزینه ۳: } a = -\frac{3}{2} \Rightarrow S = \frac{(-\frac{3}{2}) - 1}{(-\frac{3}{2})} > 0, \quad P = \frac{1 - 2(-\frac{3}{2})}{(-\frac{3}{2})} < 0 \quad \times$$

$$\text{گزینه ۴: } a = \frac{1}{4} \Rightarrow S = \frac{(\frac{1}{4}) - 1}{(\frac{1}{4})} < 0, \quad P = \frac{1 - 2(\frac{1}{4})}{(\frac{1}{4})} > 0 \quad \checkmark$$

در بین گزینه‌ها، فقط گزینه "۴" در (*) صدق می‌کند.

تذکر: باتوجه به اینکه تمام گزینه‌ها نامساوی با $\frac{1}{3}$ هستند، بنابراین شرط (**) برای همه گزینه‌ها برقرار است.

حاصل ضرب ریشه‌ها $(P = \frac{c}{a})$ و حاصل جمع ریشه‌ها $(S = \frac{-b}{a})$ باید مثبت باشد:

$$P = \frac{2a-1}{2a+1} > 0, S = \frac{4a}{2a+1} > 0 \quad (*)$$

همچنین باید $\Delta > 0$ باشد:

$$\Delta = (-4a)^2 - 4(2a+1)(2a-1) = 16a^2 - 4(4a^2 - 1) = 4 > 0 \quad \text{همواره برقرار است}$$

بررسی گزینه‌ها:

$$\text{گزینه ۱: } a = \frac{1}{4} \Rightarrow S = \frac{4(\frac{1}{4})}{2(\frac{1}{4})+1} > 0, P = \frac{2(\frac{1}{4})-1}{2(\frac{1}{4})+1} < 0 \quad \times$$

$$\text{گزینه ۲: } a = -\frac{3}{10} \Rightarrow S = \frac{4(-\frac{3}{10})}{2(-\frac{3}{10})+1} < 0, P = \frac{2(-\frac{3}{10})-1}{2(-\frac{3}{10})+1} < 0 \quad \times$$

$$\text{گزینه ۳: } a = -\frac{2}{3} \Rightarrow S = \frac{4(-\frac{2}{3})}{2(-\frac{2}{3})+1} > 0, P = \frac{2(-\frac{2}{3})-1}{2(-\frac{2}{3})+1} > 0 \quad \checkmark$$

$$\text{گزینه ۴: } a = \frac{3}{\lambda} \Rightarrow S = \frac{4(\frac{3}{\lambda})}{2(\frac{3}{\lambda})+1} > 0, P = \frac{2(\frac{3}{\lambda})-1}{2(\frac{3}{\lambda})+1} < 0 \quad \times$$

در بین گزینه‌ها، فقط گزینه "۳" در $(*)$ صدق می‌کند.

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، اگر $a + b + c = 0$ ، آنگاه $x = 1$ و $x = \frac{c}{a}$ است. مجموع ضرایب در معادله درجه دوم داده شده برابر صفر است، پس:

$$2x^2 - (m+2)x + m = 0 \Rightarrow x = 1, x = \frac{m}{2}$$

$x = 0 : y = m$ تقاطع با محور عرض‌ها

$$\Rightarrow S = \left| \frac{m(\frac{m}{2} - 1)}{2} \right| = \frac{3}{4} \Rightarrow |m(m-2)| = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases} \\ m^2 - 2m + 3 = 0 \text{ ریشه ندارد} \end{cases}$$

به ازای $m = -1, 3$ تابع $y = 2x^2 - (m+2)x + m$ دو ریشه دارد، بنابراین هر دو مقدار قابل قبول است. حال داریم:

$$y = x^2 - mx + 1 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 : y = x^2 + x + 1 \Rightarrow x_S = \frac{-1}{2} \\ m = 3 : y = x^2 - 3x + 1 \Rightarrow x_S = \frac{3}{2} \end{cases}$$

در گزینه‌ها فقط $x = \frac{-1}{2}$ موجود است، پس گزینه "۴" درست است.

اگر $a < 0$ و عرض رأس سهمی $-\frac{1}{p}$ باشد، داریم:

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{p} \Rightarrow \Delta = 2a \Rightarrow 1 - 4a^2 = 2a$$

$$\Rightarrow 4a^2 + 2a - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{4} \end{cases}$$

باتوجه به علامت a ، $a = -\frac{1}{p}$ قابل قبول است.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \alpha > -3 \\ \beta > -3 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 3 > 0 \\ \beta + 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow (\alpha + 3)(\beta + 3) > 0 \\ \Rightarrow \alpha\beta + 3(\alpha + \beta) + 9 > 0 &\Rightarrow \frac{m}{2} + 3\left(-\frac{7}{2}\right) + 9 > 0 \\ \Rightarrow \frac{m}{2} - \frac{21}{2} + \frac{18}{2} > 0 &\Rightarrow m > 3 \quad (1) \end{aligned}$$

شرط دو ریشه حقیقی داشتن:

$$\Delta > 0 \Rightarrow 49 - 4m > 0 \Rightarrow m < \frac{49}{4} \quad (2)$$

اشتراک (۱) و (۲):

$$m \in \left(3, \frac{49}{4}\right)$$

اعداد صحیح این بازه، $\{4, 5, 6\}$ خواهند بود.

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha\beta = \frac{\beta}{25\alpha} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{25} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{5}$$

α ریشه معادله است و دو حالت رخ می‌دهد:

$$\alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow 25 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{25} + \frac{4}{5} + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -1 < \alpha \quad \times$$

$$\alpha = -\frac{1}{5} \Rightarrow 25 \times \frac{-1}{5} \times \frac{1}{25} - \frac{4}{5} + \beta = 0 \Rightarrow \beta = 1 > \alpha \quad \checkmark$$

بنابراین $\alpha = -\frac{1}{5}$ و $\beta = 1$ قابل قبول است.

$$y = -5x^2 + 4x + 1$$

$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{5}, \quad y_s = -5\left(\frac{2}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{2}{5}\right) + 1 = \frac{9}{5}$$

$$\Rightarrow S\left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right)$$

بنابراین S در ناحیه اول قرار دارد.

$$mx^2 - 4x + m^2 - 4 = 0$$

$$\frac{c}{a} = \frac{m^2 - 4}{m} \xrightarrow{\text{واسطه } \sqrt{m}} \frac{m^2 - 4}{m} = \sqrt{m^2} \Rightarrow m^2 - 4 = 3m$$

$$\Rightarrow m^2 - 3m - 4 = 0 \Rightarrow (m + 1)(m - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 4 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{m=-1} -x^2 - 4x - 3 = 0 \Rightarrow S = -\frac{b}{a} = -4$$

$$\xrightarrow{m=4} 4x^2 - 4x + 12 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \text{ریشه ندارد}$$

با توجه به نمودار $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$ و $\Delta > 0$ است.

$$c < 0 \Rightarrow c^2 > 0 \xrightarrow{a > 0, b < 0, abc > 0} c^2 + abc > 0$$

$$x^2 - x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 = 1 \\ P = x_1 x_2 = -4 \end{cases}$$

ریشه‌های معادله جدید را α و β می‌نامیم. داریم:

$$S_{\text{new}} = \alpha + \beta = (x_2^2 + \frac{1}{x_1}) + (x_1^2 + \frac{1}{x_2}) = x_1^2 + x_2^2 + \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$$

$$= S^2 - 2SP + \frac{S}{P} = 1 - 2(-4) - \frac{1}{-4} = 13 - \frac{1}{4} = \frac{51}{4}$$

$$P_{\text{new}} = (x_2^2 + \frac{1}{x_1})(x_1^2 + \frac{1}{x_2}) = (x_1 x_2)^2 + x_2^2 + x_1^2 + \frac{1}{x_1 x_2}$$

$$= P^2 + S^2 - 2P + \frac{1}{P} = (-4)^2 + (1)^2 - 2(-4) + \frac{1}{-4}$$

$$= -16 + 1 + 8 - \frac{1}{4} = -55 - \frac{1}{4} = \frac{-221}{4}$$

با S_{new} و P_{new} به دست آمده معادله جدید را می‌سازیم:

$$x^2 - S_{\text{new}}x + P_{\text{new}} = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{51}{4}x - \frac{221}{4} = 0 \Rightarrow 4x^2 = 51x + 221$$

$$2x - 1 = t, \quad 5(2x - 1)^2 - 7(2x - 1) + 2 = 0 \Rightarrow 5t^2 - 7t + 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta \text{ روش}} \Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(5)(2)$$

$$\Rightarrow \Delta = 9 \Rightarrow t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow t = \frac{7 \pm 3}{10} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 1 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \\ 2x - 1 = \frac{2}{5} \Rightarrow 2x = \frac{7}{5} \Rightarrow x = \frac{7}{10} \end{cases}$$

درنتیجه ۱ و $x = \frac{7}{10}$ جواب‌های معادله هستند.

اول: در معادله $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{5})x + \sqrt{10} = 0$ می‌دانیم:

$$\alpha + \beta = \sqrt{2} + \sqrt{5}, \quad \alpha\beta = \sqrt{10}$$

به راحتی می‌توان حدس زد که $\alpha = \sqrt{2}$ و $\beta = \sqrt{5}$ است.

دوم: ریشه‌های معادله $2x^2 - ax + 20 = 0$ مربع α و β می‌باشند. بنابراین ریشه‌های این معادله برابر ۲ و ۵ هستند. با استفاده از رابطه مجموع ریشه‌ها داریم:

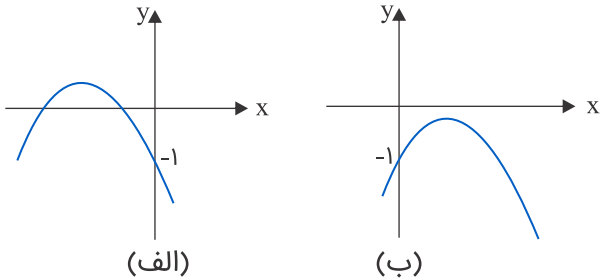
$$\text{مجموع ریشه‌ها} = 2 + 5 = \frac{-(-a)}{2} \Rightarrow a = 14$$

اولین شرط برای اینکه نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c$ از ناحیه اول عبور نکند این است که ضریب x^2 یا همان a منفی باشد. که در اینجا باید داشته باشیم:

$$a - 3 < 0 \Rightarrow a < 3$$

روش اول:

تابع صورت سؤال را می‌توان در دو حالت زیر فرض کرد:



$$f(x) = (a - 3)x^2 + ax - 1 \Rightarrow \text{عرض از مبدأ} = -1$$

در حالت (الف) باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$P > 0, \quad S < 0, \quad \Delta > 0$$

و در حالت (ب) تنها کافی است که $\Delta \leq 0$ باشد.

برای حالت (الف) داریم:

$$\Delta > 0 \Rightarrow a^2 + 4(a - 3) > 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 > 0$$

$$\Rightarrow a > 2 \text{ یا } a < -6 \quad (\text{I})$$

$$S < 0 \Rightarrow -\frac{a}{a - 3} < 0 \xrightarrow{a - 3 < 0} -a > 0 \Rightarrow a < 0 \quad (\text{II})$$

$$P > 0 \Rightarrow \frac{-1}{a - 3} > 0 \quad (\text{III})$$

(با توجه به اینکه $a - 3 < 0$ ، همواره برقرار است.)

$$(\text{I}) \cap (\text{II}) \cap (\text{III}) \Rightarrow a < -6$$

برای حالت (ب):

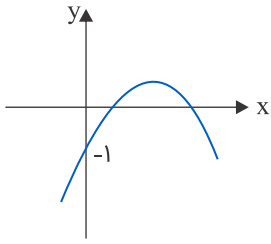
$$\Delta \leq 0 \Rightarrow a^2 + 4(a - 3) \leq 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 \leq 0 \Rightarrow -6 \leq a \leq 2$$

چون به ازای هر دو حالت (الف) و (ب) سهمی از ناحیه اول نمی‌گذرد داریم:

$$(-\infty, -6) \cup [-6, 2] = (-\infty, 2] \Rightarrow a \leq 2$$

روش دوم:

باتوجه به اینکه $a < 3$ است حالتی را در نظر می‌گیریم که نمودار حتماً از ناحیه اول بگذرد سپس مجموعه جواب به دست آمده را از $a < 3$ کم می‌کنیم.
چون عرض از مبدأ -1 است و $a < 3$ ؛ پس تابع ماکزیمم دارد.



و باتوجه به نمودار شروط زیر باید برقرار باشد:

$$1) \Delta > 0 \Rightarrow \text{باید دو ریشه داشته باشد}$$

$$2) > 0 \Rightarrow \text{جمع ریشه‌ها}$$

$$3) > 0 \Rightarrow \text{ضرب ریشه‌ها}$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow a^2 - 4(a - 3)(-1) > 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 > 0$$

$$\Rightarrow (a - 2)(a + 6) > 0 \Rightarrow a > 2 \text{ یا } a < -6 \quad (I)$$

$$> 0 \Rightarrow \frac{-a}{a - 3} > 0 \Rightarrow 0 < a < 3 \quad (II)$$

$$> 0 \Rightarrow \frac{-1}{a - 3} > 0 \Rightarrow a < 3 \quad (III)$$

$$(I) \cap (II) \cap (III) \Rightarrow 2 < a < 3$$

به ازای بازه به دست آمده برای a تابع حتماً از ناحیه اول عبور می‌کند. پس با کم کردن این بازه از $a < 3$ خواسته سؤال محقق می‌شود.

$$(-\infty, 3) - (2, 3) = (-\infty, 2] \Rightarrow a \leq 2$$

درنتیجه به ازای بازه فوق برای a نمودار تابع از ناحیه اول محورهای مختصات نمی‌گذرد.

گام اول

الف) چون نمودار از طرف بالا بر محور x ها مماس شده است، ضریب x^2 مثبت است.
 ب) نمودار منحنی درجه دو بر محور x ها مماس است. بنابراین معادله $f(x) = 0$ ریشه مضاعف داشته و $\Delta = 0$ است.

گام دوم

با مشخص شدن مقدار a ، معادله $f(x) = 0$ را حل کرده و طول نقطه تماس یا همان ریشه مضاعف تابع را مشخص می‌کنیم:

$$f(x) = ax^2 + 4x + a - 3$$

$$۱) \ a > 0 \quad (I)$$

$$۲) \ \Delta = 0 \Rightarrow 4^2 - 4(a)(a-3) = 0 \Rightarrow 16 - 4(a^2 - 3a) = 0$$

$$\Rightarrow 4(a^2 - 3a) = 16 \Rightarrow a^2 - 3a = 4$$

$$\Rightarrow a^2 - 3a - 4 = 0 \Rightarrow (a-4)(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = -1 \end{cases} \quad (II)$$

$$(I) \cap (II) : a = 4$$

با در نظر گرفتن $a = 4$ ، ضابطه $f(x)$ را بازنویسی کرده و معادله $f(x) = 0$ را حل می‌کنیم:

$$f(x) = ax^2 + 4x + a - 3 \xrightarrow{a=4} f(x) = 4x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2x+1)^2 = 0 \Rightarrow 2x+1 = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

گام اول

الف) اولاً نمودار تابع محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند، پس معادله $y = 0$ دارای دو ریشه بوده و $\Delta > 0$ است.
 ب) هر دو ریشه معادله مثبت است، بنابراین حاصل جمع و حاصل ضرب ریشه‌ها باید مثبت باشد.

گام دوم

$$y = 2x^2 - 4x + m - 3$$

$$۱) \Delta > 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4(2)(m - 3) > 0 \Rightarrow 16 - 8(m - 3) > 0$$

$$\Rightarrow 8(m - 3) < 16 \Rightarrow m - 3 < 2 \Rightarrow m < 5 \quad (I)$$

$$۲) S = x_1 + x_2 = -\left(-\frac{4}{2}\right) = 2 > 0 \Rightarrow \text{همواره برقرار است}$$

$$۳) P = x_1 \cdot x_2 = \frac{m - 3}{2} > 0 \Rightarrow m - 3 > 0 \Rightarrow m > 3 \quad (II)$$

مجموعه مقادیر قابل قبول برای m ، اشتراک دو مجموعه جواب (I) و (II) است پس می‌توان نوشت:

$$(I) \cap (II) : 3 < m < 5$$

برای اینکه نمودار تابع درجه دوم به فرم $y = ax^2 + bx + c$ همواره پایین محور x ها باشد، باید دو شرط زیر برقرار باشد:

$$۱) a < 0, \quad ۲) \Delta < 0$$

مجموعه جواب‌های این دو نامعادله را به دست آورده و بین آن‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$y = (m-1)x^2 + \sqrt{3}x + m$$

$$۱) a < 0 \Rightarrow m-1 < 0 \Rightarrow m < 1 \quad (I)$$

$$۲) \Delta < 0 \Rightarrow (\sqrt{3})^2 - 4(m-1)m < 0 \Rightarrow 3 - 4m^2 + 4m < 0 \Rightarrow 4m^2 - 4m - 3 > 0$$

جدول تعیین علامت عبارت $4m^2 - 4m - 3$ را تشکیل می‌دهیم:

$$4m^2 - 4m - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = \frac{4 + \sqrt{64}}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \\ m_2 = \frac{4 - \sqrt{64}}{8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

پس مجموعه جواب نامعادله دوم به صورت زیر درمی‌آید:

$$m \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty) \quad (II)$$

بنابراین مجموعه جواب قابل قبول برای m برابر است با:

$$(I) \cap (II) : m < -\frac{1}{2}$$

ابتدا از روی معادله $2x^2 - 3x - 4 = 0$ ، حاصل $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ را به دست می‌آوریم. سپس حاصل $1 + \frac{1}{\alpha} + 1 + \frac{1}{\beta}$ و $(1 + \frac{1}{\alpha})(1 + \frac{1}{\beta})$ را محاسبه می‌کنیم. اگر S و P مقادیر حاصل جمع و حاصل ضرب ریشه‌های یک معادله درجه دو باشند، آن معادله درجه دو به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ نوشته می‌شود.

$$2x^2 - 3x - 4 = 0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه های}} \begin{cases} \alpha + \beta = -(-\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} \\ \alpha\beta = -\frac{4}{2} = -2 \end{cases}$$

S و P را برای معادله جدید به دست می‌آوریم:

$$S = \frac{1}{\alpha} + 1 + \frac{1}{\beta} + 1 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 2 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 2 = \frac{\frac{3}{2}}{-2} + 2 = -\frac{3}{4} + 2 = \frac{5}{4}$$

$$P = (\frac{1}{\alpha} + 1)(\frac{1}{\beta} + 1) = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 1 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + 1 = -\frac{1}{4}$$

بنابراین معادله درجه ۲ جدید به صورت زیر درمی‌آید:

$$x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{4} = 0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2 - 5x - 1 = 0$$

اگر فرض کنیم $x_1 = \alpha\beta^2$ و $x_2 = \alpha^2\beta$ ریشه‌های معادله $\lambda x^2 + kx - 1 = 0$ باشند آنگاه کافی است $x_1 + x_2$ را به دست آوریم.

$$2x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{3}{2} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\lambda x^2 + kx - 1 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$\Rightarrow \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta = \frac{-k}{\lambda} \Rightarrow \alpha\beta(\beta + \alpha) = -\frac{k}{\lambda} \Rightarrow (-\frac{1}{2})(\frac{3}{2}) = -\frac{k}{\lambda} \Rightarrow k = 6$$

برای حل، یکی از ریشه‌های معادله را α و دیگری را $\alpha + 2$ در نظر می‌گیریم. در معادله داده‌شده حاصل‌جمع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را تعیین می‌کنیم از روی حاصل‌جمع مقدار α محاسبه می‌شود و با داشتن α و رابطه حاصل‌ضرب مقدار m را هم محاسبه می‌کنیم.

$$3x^2 - 15x + m = 0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\alpha \text{ و } (\alpha+2) \text{ ریشه‌های}} \begin{cases} \alpha + \alpha + 2 = -(-\frac{15}{3}) = 5 \\ \alpha(\alpha + 2) = \frac{m}{3} \end{cases}$$

مقدار α را حساب می‌کنیم:

$$2\alpha + 2 = 5 \Rightarrow 2\alpha = 3 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$$

محاسبه مقدار m :

$$\alpha(\alpha + 2) = \frac{m}{3} \xrightarrow{\alpha = \frac{3}{2}} \frac{3}{2}(\frac{3}{2} + 2) = \frac{m}{3} \Rightarrow \frac{3}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{m}{3} \Rightarrow \frac{m}{3} = \frac{21}{4} \Rightarrow m = \frac{63}{4}$$

گام اول

α و β را ریشه‌های معادله درجه دو فرض می‌کنیم. $\sqrt{2}$ واسطه هندسی بین α و β است. بنابراین داریم:

$$\alpha\beta = (\sqrt{2})^2 = 2$$

گام دوم

در معادله درجه دو به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر است با:

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$mx^2 - 5x + m^2 - 3 = 0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه‌های}} \alpha\beta = \frac{m^2 - 3}{m}$$

$$\xrightarrow{\alpha\beta=2} 2 = \frac{m^2 - 3}{m} \Rightarrow m^2 - 3 = 2m$$

$$\Rightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Rightarrow (m - 3)(m + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -1 \end{cases}$$

$$m = 3: 3x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 - 72 < 0 \Rightarrow \text{فاقد ریشه}$$

$$m = -1: -x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 - 8 > 0$$

پس فقط $m = -1$ قابل قبول است.

یک ریشه را α و ریشه دیگر را $3\alpha + 3$ در نظر می‌گیریم.

با استفاده از حاصل جمع ریشه‌ها مقدار α را محاسبه می‌کنیم. سپس با استفاده از حاصل ضرب ریشه‌ها مقدار m را به دست می‌آوریم.

$$3x^2 - 17x + m = 0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\alpha \text{ و } (3\alpha+3) \text{ ریشه‌های}} \alpha + (3\alpha + 3) = -(-\frac{17}{3})$$

$$\Rightarrow 4\alpha + 3 = \frac{17}{3} \Rightarrow 4\alpha = \frac{10}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{5}{6}$$

$$3\alpha + 3 = 3(\frac{5}{6}) + 3 = \frac{5}{2} + 3 = \frac{11}{2}$$

پس حاصل ضرب ریشه‌ها برابر است با:

$$\alpha \times (3\alpha + 3) = \frac{5}{6} \times \frac{11}{2} = \frac{m}{3} \Rightarrow \frac{m}{3} = \frac{55}{12} \Rightarrow m = \frac{55}{4}$$

گام اول

الف) فرض کنید α و β ریشه‌های معادله $3x^2 - 4x - 1 = 0$ باشند پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که $(\alpha + 1)$ و $(\beta + 1)$ ریشه‌های معادله $3x^2 + ax + b = 0$ هستند.

ب) برای به دست آوردن مقدار b باید حاصل ضرب ریشه‌های معادله یا همان $(\alpha + 1)(\beta + 1)$ را تعیین کنیم.

گام دوم

$$3x^2 - 4x - 1 = 0 \xrightarrow{\alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه‌ها}} \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{4}{3} \\ \alpha\beta = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad (I)$$

$$3x^2 + ax + b = 0 \xrightarrow{(\alpha+1) \text{ و } (\beta+1) \text{ ریشه‌ها}} (\alpha + 1)(\beta + 1) = \frac{b}{3}$$

$$\Rightarrow \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = \frac{b}{3} \xrightarrow{(I)} -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + 1 = \frac{b}{3} \Rightarrow \frac{b}{3} = 2 \Rightarrow b = 6$$

ریشه‌های معادله درجه دوم را α و β در نظر می‌گیریم. چون $\frac{1}{\lambda}$ واسطه حسابی بین α و β است، داریم:

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{\lambda}$$

در معادله درجه دوم به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، در این صورت $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ است.

$$(m^2 - 4)x^2 - 3x + m = 0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه‌های}} \alpha + \beta = -\left(-\frac{3}{m^2 - 4}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = \frac{3}{m^2 - 4} \text{ و } \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{1}{4}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{3}{m^2 - 4} = \frac{1}{4} \Rightarrow m^2 - 4 = 12 \Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m = \pm 4$$

به‌ازای $m = 4$ مقدار Δ برای معادله منفی شده و در نتیجه معادله فاقد ریشه می‌شود، پس فقط $m = -4$ قابل قبول است.

$$x^2 + x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 x_2 = -5 \end{cases}$$

ابتدا معادله‌ای می‌سازیم که ریشه‌های آن $1 + x_1$ و $1 + x_2$ باشد برای این منظور کافی است از x ها یک واحد کم کنیم:

$$(x - 1)^2 + (x - 1) - 5 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 5 = 0$$

اگر ریشه‌ها α و β باشد:

$$(\alpha + \beta) = 1, \quad \alpha\beta = -5$$

حال معادله‌ای می‌سازیم که ریشه‌های آن $\frac{1}{\alpha^3}$ و $\frac{1}{\beta^3}$ باشد:

$$S_{\text{New}} = \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{(\alpha\beta)^3} = \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3(\alpha + \beta)(\alpha\beta)}{(\alpha\beta)^3}$$

$$= \frac{(1)^3 - 3(1)(-5)}{-125} = -\frac{16}{125}$$

$$P_{\text{New}} = \frac{1}{\alpha^3} \times \frac{1}{\beta^3} = \frac{1}{(\alpha\beta)^3} = -\frac{1}{125}$$

$$\Rightarrow x^2 - \left(-\frac{16}{125}\right)x - \frac{1}{125} \Rightarrow 125x^2 + 16x - 1 = 0$$

$$S = 2 + \sqrt{7} + 2 - \sqrt{7} = 4$$

$$P = (2 + \sqrt{7})(2 - \sqrt{7}) = 4 - 7 = -3$$

$$\xrightarrow{x^2 - Sx + P = 0} x^2 - 4x - 3 = 0 \text{ معادلهٔ مطلوب}$$

$$x^2 + 2(m-3)x + m - 5 = 0 \xrightarrow{\text{مقایسه با فرم استاندارد } ax^2 + bx + c = 0} \begin{cases} a = 1 \\ b = 2(m-3) \\ c = m-5 \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2 \Rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{-2(m-3)}{1} = \frac{m-5}{1}$$

$$\Rightarrow -2m + 6 = m - 5 \Rightarrow 3m = 11 \Rightarrow m = \frac{11}{3}$$

در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $a + c = b$ ، آنگاه $x = -1$ و $x = -\frac{c}{a}$ است.

$$y = mx^2 - 4x - (m+4) \Rightarrow x = -1, x = \frac{m+4}{m}$$

$$f(0) = -(m+4)$$

$$\left| \frac{m+4}{m} - (-1) \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|m|} = \frac{\sqrt{16 + 4m^2 + 16m}}{|m|} = \frac{2|m+2|}{|m|}$$

$$S = \frac{\left| \frac{m+4}{m} - (-1) \right| \times |-(m+4)|}{2} = \frac{\left| \frac{2(m+2)}{m} \right| \times (m+4)}{2} = 3$$

$$\Rightarrow m^2 + 6m + 8 = 3|m|$$

m باید کوچکتر از صفر باشد، زیرا برای m های مثبت، معادلهٔ فوق جواب ندارد. پس داریم:

$$\xrightarrow{m < 0} m^2 + 9m + 8 = -3m \Rightarrow m^2 + 12m + 8 = 0 \Rightarrow m = -1, m = -8$$

$$x_{\text{رأس}} = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2m} \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \Rightarrow x_{\text{رأس}} = -2 \\ m = -8 \Rightarrow x_{\text{رأس}} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \left| -2 + \frac{1}{4} \right| = \frac{7}{4} \end{cases}$$

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر مجموع ضرایب صفر باشد، یکی از ریشه‌ها $x = 1$ و دیگری $x = \frac{c}{a}$ است:

$$x^2 - (a+1)x + a = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = a \end{cases} \Rightarrow a = 3$$

$$x^2 - (3a+1)x + b = 0 \xrightarrow{a=3} x^2 - 10x + b = 0$$

مجموع ریشه‌های معادله داده شده برابر $S = -\frac{-10}{1} = 10$ است و ریشه‌ها باید دو عدد زوج متوالی باشند، پس: $x = 4$ و $x = 6$

$$|(1 \times 3) - (4 \times 6)| = 21$$

نکته: اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها از روابط زیر به دست می‌آید:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$$

بنابراین داریم:

$$3x^2 - 12x - a = 0$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-12)}{3} = 4 \Rightarrow \beta = 4 - \alpha \quad (1)$$

$$2\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha = 7 \xrightarrow{(1)} 2\alpha^2 + (4 - \alpha)^2 - 4\alpha = 7$$

$$\Rightarrow 3\alpha^2 - 12\alpha + 9 = 0 (*) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = 3 \end{cases}$$

با مقایسه (*) با معادله داده شده مقدار $a = -9$ به دست می‌آید، داریم:

$$\frac{a}{\text{ریشه بزرگتر}} = \frac{-9}{3} = -3$$

مجموع ریشه‌های معادله اول برابر است با:

$$S = -\frac{b}{a} = a$$

و حاصل ضرب ریشه‌های معادله دوم عبارتست از:

$$P = \frac{c}{a} = \frac{a+2}{a}$$

$$S = P \Rightarrow \frac{a+2}{a} = a \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

برای تشخیص a درست لازم است هر دو Δ معادلات مثبت باشد یعنی:

$$\Delta_1 = a^2 + 4 \Rightarrow \text{همواره مثبت است}$$

$$\Delta_2 = 16 - 4a(a+2) \Rightarrow a = -1 \Rightarrow \Delta_2 = 16 + 4 + 1 \quad \text{ق ق}$$

پس به ازای $a = -1$ رأس سهمی عبارتست از:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1-2a}{2} = -1/5$$

اگر به معادله دقت شود، مشخص می‌شود که:

$$S = 1, \quad P = -\frac{b}{a}, \quad \Delta = a^2 + 4ab$$

اختلاف ریشه‌ها برابر است با:

$$D = |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{a^2 + 4ab}}{|a|} = \frac{|a|\sqrt{1 + 4\frac{b}{a}}}{|a|} = \sqrt{1 + 4\frac{b}{a}}$$

در ضمن می‌دانیم که:

$$4\alpha^2 + 2\alpha^2 - 2\alpha\beta = 17 \Rightarrow 2\alpha(\alpha^2 + \beta^2) + 2\alpha\beta^2 - 2\alpha\beta = 17 \\ \Rightarrow 2\alpha(\alpha^2 + \beta^2) + 2\alpha(\beta^2 - \beta) = 17$$

چون β ریشه معادله است، پس در آن صدق می‌کند. یعنی:

$$a\beta^2 - a\beta - b = 0 \xrightarrow{\div a} \beta^2 - \beta = \frac{b}{a} = -P$$

بنابراین:

$$2\alpha(S^2 - 2P) - 2\alpha P = 17 \Rightarrow 2\alpha - 4\alpha P - 2\alpha P = 17 \Rightarrow P = \frac{1}{2\alpha}$$

پس:

$$D = \sqrt{1 - 4 \times \frac{1}{2\alpha}} = \sqrt{\frac{4}{\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$$

چون نقاط A و B هم‌عرض هستند، پس طول رأس سهمی وسط طول‌های آنها است، یعنی:

$$x_S = \frac{-\omega + 3}{2} = -1 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow -1 = \frac{-b}{2a} \Rightarrow b = 2a \quad (1)$$

در ضمن:

$$y = ax^2 + bx + c, \quad S(-1, 1) \Rightarrow 1 = a - b + c$$

$$\xrightarrow{(1)} 1 = a - 2a + c \Rightarrow c - a = 1$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \omega \Rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \omega \Rightarrow S^2 - 2P = \omega$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2P = \omega \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} - 2P = \omega$$

$$\xrightarrow{(1)} \frac{4a^2}{a^2} - 2P = \omega \Rightarrow P = -\frac{1}{2}$$

یعنی داریم:

$$\frac{c}{a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -2c \quad (2)$$

$$c - a = 1 \xrightarrow{(2)} 3c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{3}$$

که باتوجه به معادله سهمی یعنی $y = ax^2 + bx + c$ همان محل برخورد سهمی با محور عرض‌ها است، زیرا:

$$x = 0 \Rightarrow y = c = \frac{1}{3}$$

دهانه سهمی روبه پایین است، پس: $a < 0$

یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی است، یعنی ضرب ریشه‌ها منفی است، پس:

$$P < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \xrightarrow{a < 0} c > 0$$

مقدار عددی ریشه مثبت از ریشه منفی بزرگ‌تر است، یعنی مجموع ریشه‌ها مثبت است، پس:

$$S > 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < 0 \xrightarrow{a < 0} b > 0$$

گام اول

الف) معادله را با تغییر متغیر $\sqrt{x} = t$ به معادله درجه دو تبدیل می‌کنیم.
 ب) برای این که معادله اولیه دارای دو جواب متمایز باشد، باید معادله جدید دو ریشه مثبت داشته باشد. پس سه شرط $\Delta > 0$ ، $t_1 + t_2 > 0$ و $t_1 t_2 > 0$ را برای معادله جدید بررسی می‌کنیم.

گام دوم

$$x - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0 \xrightarrow{\sqrt{x}=t} t^2 - 2t + m - 1 = 0$$

$$۱) \Delta > 0 \Rightarrow 4 - 4(m - 1) > 0 \Rightarrow 4 - 4m + 4 > 0 \Rightarrow 4m < 8 \Rightarrow m < 2 \quad (I)$$

$$۲) t_1 t_2 > 0 \Rightarrow \frac{m-1}{1} > 0 \Rightarrow m-1 > 0 \Rightarrow m > 1 \quad (II)$$

$$۳) t_1 + t_2 > 0 \Rightarrow -(-\frac{2}{1}) > 0 \Rightarrow 2 > 0 \Rightarrow \text{همواره برقرار است}$$

توجه داشته باشید که به ازای $m = 1$ ، معادله $x - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0$ به معادله $x - 2\sqrt{x} = 0$ تبدیل می‌شود که دارای دو جواب $x = 0$ و $x = 4$ است. پس $m = 1$ نیز قابل قبول است:

$$(I) \cap (II) \cup m = 1 \Rightarrow 1 \leq m < 2$$

ابتدا شکل کلی معادله را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 + \left(\frac{x^2-x+1}{x}\right)^2 - 5 = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x - 1 + \frac{1}{x}\right)^2 - 5 = 0$$

با در نظر گرفتن $x + \frac{1}{x} = t$ داریم:

$$\Rightarrow t^2 + (t-1)^2 - 5 = 0 \Rightarrow t^2 + t^2 - 2t + 1 - 5 = 0$$

$$\Rightarrow 2t^2 - 2t - 4 = 0 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow (t+1)(t-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -1 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -1 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0 & \text{ریشه ندارد} \\ t = 2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

ابتدا معادله $x(5x + 3) = 2$ را به فرم استاندارد معادله درجه دو تبدیل کرده و باتوجه به اینکه α و β ریشه‌های آن است، مقدار $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ را به دست می‌آوریم.

برای یافتن k باید حاصل $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ را محاسبه کرده و برابر $\frac{k}{4}$ قرار دهیم.

$$x(5x + 3) = 2 \Rightarrow 5x^2 + 3x = 2 \Rightarrow 5x^2 + 3x - 2 = 0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه‌های}} \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{3}{5} \\ \alpha\beta = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

مقدار k را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 4x^2 - kx + 25 &= 0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\frac{1}{\alpha^2} \text{ و } \frac{1}{\beta^2} \text{ ریشه‌های}} \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{k}{4} \\ \Rightarrow \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 \beta^2} &= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{k}{4} \\ \Rightarrow \frac{\left(-\frac{3}{5}\right)^2 - 2\left(-\frac{2}{5}\right)}{\left(-\frac{2}{5}\right)^2} &= \frac{k}{4} \Rightarrow \frac{\frac{9}{25} + \frac{4}{5}}{\frac{4}{25}} = \frac{\frac{29}{5}}{\frac{4}{25}} = \frac{29}{4} = \frac{k}{4} \Rightarrow k = 29 \end{aligned}$$