

تمرین بعد از کلاس

به سبک استاد علی داودوندی رتبه ۶۱ کنکور



در هر قسمت ابتدا ۱ دقیقه خودتان فکر کنید اگه نتوانستید حل کنید ۱ دقیقه به کمک جزوه سوال را حل کنید و اگر باز هم نتوانستید در ۱ دقیقه پاسخنامه را بررسی کرده و سپس مسیر حل را به خودتان توضیح دهید. حل ویدیویی تمرین ها در آپارات و یوتیوب قرار گرفته است و به کمک **تایم لاین** می توانید هر سوال را پیدا کنید و حل آن را مشاهده کنید

 ALIDAVOODVANDI.IR

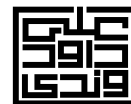
 [ALI.DAVOODVANDI](https://www.instagram.com/ALI.DAVOODVANDI)

 [ALI_DAVOODVANDI](https://www.youtube.com/ALI_DAVOODVANDI)

 [ALI_DAVOODVANDI](https://www.tiktok.com/ALI_DAVOODVANDI)

 ۰۹۳۸۳۱۶۵۳۵۴

 [ALI_DAVOODVANDI](https://www.telegram.me/ALI_DAVOODVANDI)



گزینه ۲

۱

چون x عدد صحیح است پس y^2 باید بر $1 - y^2$ بخش پذیر باشد از طرفی y هم باید عدد صحیح باشد:

$$y^2 = 0, 4, 9, 25 \Rightarrow y = 0, \pm 2, \pm 3, \pm 5$$

$$\Rightarrow f = \{(-22, 0), (24, 2), (24, -2), (9, 3), (9, -3), (3, 5), (3, -5)\}$$

با حذف حداقل ۳ عضو تابع خواهیم داشت.

گزینه ۲

۲

شرط تابع بودن یک رابطه این است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی نباید مؤلفه اول برابر داشته باشند و اگر مؤلفه اول آن‌ها باهم برابر بود مؤلفه‌های دوم هم باهم برابر باشند.

$$A = \{(3, m^2), (2, 1), (-3, m), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$$

$$(3, m^2), (3, m+2) \in A \xrightarrow{\text{شرط تابع بودن}} m^2 = m+2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (m-2)(m+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -1 \end{cases}$$

مقادیر به دست آمده برای m را بررسی می‌کنیم تا مطمئن شویم رابطه به تابع تبدیل شده است.

$$m = 2 \Rightarrow A = \{(3, 4), (2, 1), (-3, 2), (-2, 2), (3, 4), (2, 4)\}$$

به ازای $m = 2$ دو زوج مرتب $(2, 1)$ و $(2, 4)$ در رابطه وجود دارد، پس تابع نیست.

$$m = -1 \Rightarrow A = \{(3, 1), (2, 1), (-3, -1), (-2, -1), (3, 1), (-1, 4)\}$$

شرایط تابع بودن برقرار است، پس $m = -1$ تنها مقدار قابل قبول برای m است.

گزینه ۳

۳

$$\begin{cases} (2, 3n^2 - 1) \in f \\ (2, 2n) \in f \end{cases} \Rightarrow 3n^2 - 1 = 2n \Rightarrow 3n^2 - 2n - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ n = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

به ازای $n = 1$ f تابع نیست؛ اما به ازای $n = -\frac{1}{3}$ f تابع است.

$$f(3) = \frac{1}{n} = \frac{1}{-\frac{1}{3}} = -3$$

$$\begin{cases} (V, 1 - 3n^2) \\ (V, -2n) \end{cases} \Rightarrow -2n = 1 - 3n^2 \Rightarrow 3n^2 - 2n - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 1 \Rightarrow f = \{(V, -2), (1, -1), (2, 1), (V, -2), (1, 2)\} \times \\ n = -\frac{1}{3} \Rightarrow f = \{(V, \frac{2}{3}), (1, -1), (2, -\frac{1}{3}), (V, \frac{2}{3}), (-3, 2)\} \end{cases} \checkmark$$

به ازای $n = 1$ رابطه تابع نیست؛ پس فقط $n = -\frac{1}{3}$ قابل قبول است. بنابراین:

$$f(2) = -\frac{1}{3}$$

پاسخ سؤال ۵

گزینه ۳

۵

۶

گزینه ۴

۶

چون از ۲، دو پیکان خارج شده است باید ۳ و $a^2 + 2a$ برابر باشند.

$$a^2 + 2a = 3 \Rightarrow a^2 + 2a - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -3 \end{cases}$$

اما اگر $a = 1$ را قرار دهیم، $(1, 2)$ و $(1, 4)$ تشکیل می‌شود که باز هم تابع نخواهیم داشت. پس گزینه (۴) صحیح است.

پاسخ سؤال ۷

گزینه ۲

۷

از عدد ۱ و ۴ دو فلش خارج شده که باید یکی از آن‌ها حذف شود.

گزینه ۳

۸

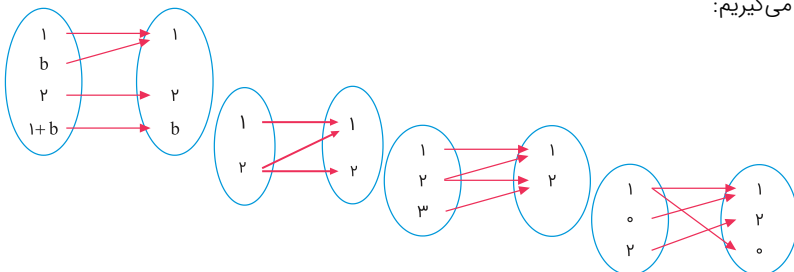
از a دو پیکان خارج شده است و اگر مولفه دوم آن نابرابر باشد، این نمودار تابع نخواهد بود. برای رفع این مشکل، مولفه‌های دوم را یکسان قرار می‌دهیم: $a = 1$ پس نمودار به این ترتیب خواهد بود:

برای بررسی b ، حالات مختلف برابری مولفه‌های اول را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$b = 1$: تابع نیست.

$b = 2$: تابع نیست.

$b = 0$: تابع نیست.



دوبه‌دو مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌ها را برابر قرار می‌دهیم و به ازای m به‌دست‌آمده، تابع بودن f را بررسی می‌کنیم:

الف) تابع نیست: $m = -1 \Rightarrow (-1, -1), (-1, 0) \in f$

ب) تابع نیست: $m^2 - 1 = -1 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow (0, -1), (0, 1) \in f$

پ) تابع نیست $m^2 - 1 = m \Rightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $m^2 - 1 \neq m^2$

در واقع قسمت (پ) به خاطر زوج مرتب‌های $(m^2 - 1, m^2)$ و $(m, m^2 - 1)$ تابع نیست.

ت) $m = m^2 \Rightarrow m = 1, m = 0$

تابع نیست: $(1, 0), (1, 2) \in f$

ث) $m^2 - 1 = m^2 \times$

ج) $m^2 = -1 \times$

در نتیجه رابطه f به ازای $m \in A = \left\{ -1, 1, 0, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$ تابع نیست.

رابطه‌ای تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایز، مؤلفه‌های اول برابر نداشته باشند.

$$\begin{cases} (3, 6) \in R \\ (3, x^2 + x) \in R \end{cases} \Rightarrow x^2 + x = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

اگر $x = 2$ باشد، دو زوج مرتب متمایز $(2, 4)$ و $(2, 5)$ عضو رابطه هستند که در نتیجه این رابطه تابع نمی‌شود. به ازای $x = -3$ داریم:

$$\begin{cases} (-3, y + 1) \in R \\ (-3, 5) \in R \end{cases} \Rightarrow y + 1 = 5 \Rightarrow y = 4$$

$$\Rightarrow y - x = 4 + 3 = 7$$

دانش‌آموز سال دوازدهم، چندین کتاب درسی دارد، لذا این گزینه تابع نیست.

از عدد ۲ دو فلش خارج شده، لذا باید انتهای فلش‌ها باهم یکسان باشند:

$$a + b - 1 = 4 \Rightarrow a + b = 5 \Rightarrow a = -b + 5$$

از رابطه فوق متوجه می‌شویم که $(a, 6)$ و $(-b + 5, 3a - 3)$ مؤلفه اول برابر دارند، پس باید مؤلفه دوم آن‌ها هم برابر باشد:

$$3a - 3 = 6 \Rightarrow 3a = 9 \Rightarrow a = 3 \xrightarrow{a+b=5} 3 + b = 5 \Rightarrow b = 2$$

$$\Rightarrow a - b = 3 - 2 = 1$$

مؤلفه‌های اول را با هم و مؤلفه‌های دوم را نیز با هم مساوی قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = ۴ \\ a^۲ - b^۲ = ۱ \Rightarrow (a - b)(a + b) = ۱ \Rightarrow (a - b) \times ۴ = ۱ \Rightarrow a - b = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = ۴ \\ a - b = \frac{1}{4} \Rightarrow ۲a = ۴ + \frac{1}{4} \Rightarrow ۲a = \frac{۱۷}{۴} \Rightarrow a = \frac{\frac{۱۷}{۴}}{۲} = \frac{۱۷}{۸} \end{cases}$$

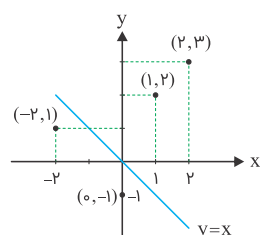
$$a - b = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{۱۷}{۸} - b = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{۱۷}{۸} - \frac{1}{4} = \frac{۱۵}{۸}$$

$$a - ۲b = \frac{۱۷}{۸} - ۲\left(\frac{۱۵}{۸}\right) = \frac{۱۷ - ۳۰}{۸} = \frac{-۱۳}{۸}$$

برای تابع بودن باتوجه به زوج‌های $(۱, ۲)$ و $(۱, k^۲ + k)$ باید داشته باشیم:

$$k^۲ + k = ۲ \Rightarrow k^۲ + k - ۲ = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (k + ۲)(k - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} k = -۲ \\ k = ۱ \end{cases}$$



اگر $k = ۱ \leftarrow f = \{(۱, ۲), (۱, ۱), (۱, ۲), (۲, ۳), (۰, -۱)\} \leftarrow k = ۱$ تابع نیست.
اگر $k = -۲ \leftarrow f = \{(۱, ۲), (-۲, ۱), (۱, ۲), (۲, ۳), (۰, -۱)\} \leftarrow k = -۲$ تابع است.

بنابراین دو نقطه از تابع f بالای نیمساز ناحیه‌های دوم و چهارم قرار دارند.

برای اینکه x عددی صحیح باشد باید ۳۰ بر $|y| + ۱$ بخش‌پذیر باشد و y هم عددی صحیح باشد:

$$۱ + |y| = ۱, ۲, ۳, ۵, ۶, ۱۰, ۱۵, ۳۰$$

$$\Rightarrow |y| = ۰, ۱, ۲, ۴, ۵, ۹, ۱۴, ۲۹$$

$$\Rightarrow y = \pm ۰, \pm ۱, \pm ۲, \pm ۴, \pm ۵, \pm ۹, \pm ۱۴, \pm ۲۹$$

$$f = \{(۳۰, ۰), (۱۵, \pm ۱), (۱۰, \pm ۲), (۶, \pm ۴), (۵, \pm ۵), (۳, \pm ۹), (۲, \pm ۱۴), (۱, \pm ۲۹)\}$$

برای اینکه f تابع باشد، باید حداقل ۷ عضو از f را حذف کنیم.

کافیست نقاط زیر حذف شده تا در نمودار نقاط با طول یکسان نداشته باشد.

حذف یک نقطه بین A و B و حذف دو نقطه بین C و D .

در کل $۱ + ۲ = ۳$ نقطه.

$$f = \{(0, 0), (1, 1), (2, 4)\} \cup \{(0, 0+0), (0, 0+1), (0, 0+2), (1, 1+0), (1, 1+1), (1, 1+2), (2, 2+0), (2, 2+1), (2, 2+2)\}$$

$$f = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$$

f دارای ۹ عضو است.

$$x = 1 \Rightarrow 2x + y \leq 7 \Rightarrow 2 + y \leq 7 \Rightarrow y \leq 5 \Rightarrow y = 1, 2, 3, 4, 5$$

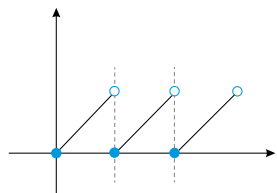
$$x = 2 \Rightarrow 2x + y \leq 7 \Rightarrow 4 + y \leq 7 \Rightarrow y \leq 3 \Rightarrow y = 1, 2, 3$$

$$x = 3 \Rightarrow 2x + y \leq 7 \Rightarrow 6 + y \leq 7 \Rightarrow y \leq 1 \Rightarrow y = 1$$

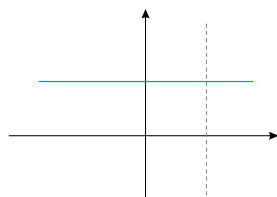
$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1)\}$$

گزینه "۱" نمودار مربوط به یک تابع نمی‌باشد. بر روی خط $x = 1$ دو نقطه قرار گرفته‌اند که دارای x یکسان و y متفاوت می‌باشند، پس این نمودار تابع نیست. در بقیه گزینه‌ها چون هر خط موازی محور y ها، نمودار را فقط در یک نقطه قطع می‌کند، تابع می‌باشند.

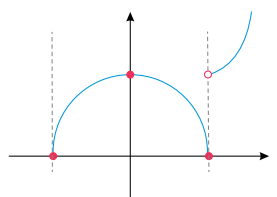
گزینه "۲":



گزینه "۳":



گزینه "۴":



با استفاده از اتحاد جمله مشترک و اتحاد مزدوج داریم:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \frac{(x-3)(x-2)}{(x-2)(x+2)} \Rightarrow f(x) = \frac{x-3}{x+2}$$

$$\xrightarrow{f(x)=6} \frac{x-3}{x+2} = 6 \Rightarrow x-3 = 6x+12 \Rightarrow 5x = -15 \Rightarrow x = -3$$

تابع f به ازای هر عددی مثل x مربع آن عدد یعنی x^2 ، به علاوه دو برابر معکوس مکعب آن عدد یعنی $\frac{2}{x^3}$ را نسبت می‌دهد:

$$f(x) = x^2 + \frac{2}{x^3} \Rightarrow f(1) = (1)^2 + \frac{2}{(1)^3} = 1 + 2 = 3$$

می‌دانیم در صورتی یک رابطه، تابع است که هیچ مولفهٔ اولی با بیشتر از یک مولفهٔ دوم در ارتباط نباشد.

الف) یک شهر ممکن است چند سوغاتی داشته باشد، پس این رابطه تابع نیست.

ب) هر فرد فقط می‌تواند یک گروه خونی داشته باشد، پس این رابطه تابع است.

پ) هر عدد فقط یک مربع دارد، پس این رابطه تابع است.

ت) هر فرد تعداد مشخصی فرزند دارد، پس این رابطه تابع است.

می‌دانیم اگر $m > 0$ باشد، $\frac{|m|}{m} = 1$ و اگر $m < 0$ باشد، $\frac{|m|}{m} = -1$ است. (واضح است که $m \neq 0$)

$$1) m > 0 \Rightarrow f = \{(1, m^2 - 2), (1, -2), (-1, 7)\}$$

$$m^2 - 2 = -2 \Rightarrow m^2 = 0 \Rightarrow m = 0 \quad \times$$

$$2) m < 0 \Rightarrow f = \{(-1, m^2 - 2), (1, -2), (-1, 7)\}$$

$$m^2 - 2 = 7 \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -3 \end{cases} \quad \times$$

فقط به ازای $m = -3$ رابطهٔ داده‌شده تابع است.

باتوجه به نمودار ون، درواقع تابع به صورت $\{(m, p), (n, p)\}$ است، پس مؤلفه‌های دوم تابع یک عدد هستند.

$$\Rightarrow 2c = 3a = -2b + 2 = p$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 2a \\ 2c = -2b + 2 \Rightarrow c = -b + 1 \end{cases}$$

درضمن از سه مؤلفه اول تابع f ، باید دو مؤلفه یکسان داشته باشیم.

$$\text{غ.ق.ق} \quad 3a = c + 1 \xrightarrow{c=2a} 3a = 2a + 1 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta < 0$$

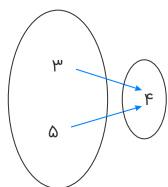
$$\text{اگر} \quad 3a + 2 = c + 1 \xrightarrow{c=2a} 3a + 2 = 2a + 1 \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases} \text{ غ.ق.ق}$$

$$\xrightarrow{a=1} \begin{cases} c = 2a = 2 \\ c = -b + 1 \Rightarrow 2 = -b + 1 \Rightarrow b = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f = \{(3, 4), (5, 4)\} = \{(3, 4), (5, 4)\}$$

$$\Rightarrow m + n + p = 3 + 5 + 4 = 12$$



زوج مرتب‌های رابطه R به صورت زیر هستند:

$$R = \{(-2, 0), (-1, -1), (-1, 1), (0, -2), (0, 2), (1, 1), (1, -1), (2, 0)\}$$

بنابراین R ، ۸ عضو دارد.

در این تابع $D_f = \{2, 3, 4\}$ و $R_f = \{7, -1, a^2 - 1\}$ و چون تعداد اعضای دامنه بیشتر از برد است، پس باید در برد تابع عضوی تکراری داشته باشیم. بنابراین:

$$a^2 - 1 = 7 \Rightarrow a^2 = 8 \Rightarrow a = \pm\sqrt{8}$$

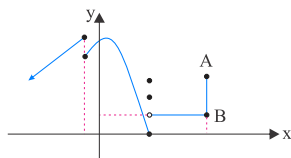
$$a^2 - 1 = -1 \Rightarrow a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$$

بنابراین ۳ مقدار برای a وجود دارد.

می‌دانیم دامنه مجموعه همه مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌های تشکیل‌دهنده تابع و برد مجموعه همه مؤلفه‌های دوم این زوج مرتب‌ها است.

$$\text{دامنه} = \{1, 2, 3\} = \{1, a, 2\} \Rightarrow a = 3$$

$$\text{برد} = \{2a, -1, 3a - 1\} \xrightarrow{a=3} \{6, -1, 8\}$$



در نمودار هر تابع، هر خط عمودی دلخواه، باید نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند. در نمودار داده‌شده، اگر خطی عمودی از نقاط A و B بگذرد، نمودار را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کند، لذا گزینه "۴" صحیح است.

هر خط عمودی (موازی محور yها) باید نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند تا نمودار یک تابع باشد. بنابراین از بین نقاط F, J و K حداقل دو نقطه و از بین نقاط B و D حداقل یک نقطه باید حذف کرد تا نمودار تابع شود. بنابراین درمجموع حداقل سه نقطه باید حذف شود.

$$\begin{cases} (2, k^2 + 1) \in f \\ (2, 10) \in f \end{cases} \Rightarrow k^2 + 1 = 10 \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow k = \pm 3$$

به ازای $k = 3$ رابطه f تابع نیست، پس فقط $k = -3$ قابل قبول است.

$$\Rightarrow g = \{(2, -4), (4, -9)\} \Rightarrow \text{مجموع مقادیر برد} = -4 - 9 = -13$$

هر دو رابطه طبق فرض تابع هستند.

در تابع اول چون دو مؤلفه اول برابر با ۱ داریم $(1 = \sqrt{4} - 1)$ ، پس مؤلفه‌های دومشان نیز باهم برابرند:

$$2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

دامنه تابع اول $\{1, 3, b - 1\}$ و دامنه تابع دوم $\{3, 4, 1\}$ است. پس:

$$b - 1 = 4 \Rightarrow b = 5$$

$$\Rightarrow a + 2b = 2 + 2 \times (5) = 12$$

وقتی دامنه تک‌عضوی است، پس الزاماً برد تابع نیز تک‌عضوی است.

$$f = \{(1, x - y), (3x + y, 2), (1, 2)\}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$4x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{3}{4} - 2 = -\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow (4x, 2y) = (3, -10)$$

می‌دانیم در دامنه توابع کسری، ریشه‌های مخرج حضور ندارد، بنابراین $x = \frac{1}{p}$ و $x = -2$ ریشه عبارت $2x^2 + bx + c$ است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$2x^2 + bx + c = 2(x + 2)(x - \frac{1}{p}) = 2x^2 + 3x - 2 \Rightarrow b = 3, c = -2 \Rightarrow b + c = 1$$

$$D_f = \{1, 2, a\}$$

$$R_f = \{1, b, c\}$$

از طرفی $f(a) = f(2)$ پس: $c = 1$

پس باتوجه به R_f و برابری دامنه و برد تابع، باید $b = 2$ که در این صورت داریم:

$$R_f = \{1, 2\}$$

$$D_f = \{1, 2, a\}$$

در این صورت $a = 1$ یا $a = 2$ ؛ اما دقت کنید که اگر $a = 1$ شود، f نمی‌تواند تابع باشد، پس $a = 2$ و مقدار $a + b + c$ برابر ۵ می‌شود.

برای تعیین دامنهٔ تابع باید ببینیم نمودار تابع کدام محدوده از محور x ها را پوشش می‌دهد. مشاهده می‌شود به جز $x = 2$ تمام اعداد حقیقی بر روی محور x ها توسط نمودار پوشش داده می‌شود. بنابراین دامنهٔ تابع $\mathbb{R} - \{2\}$ می‌باشد.

برای تعیین برد تابع باید ببینیم نمودار تابع کدام محدوده از محور y ها را پوشش می‌دهد. مشاهده می‌شود که محدودهٔ $y \geq -1$ توسط نمودار پوشش داده می‌شود.

برد تابع، مجموعه اعضا y یا خروجی‌های مجاز از تابع است. در این سوال باید ببینیم که تابع f نمی‌تواند چه خروجی دهد تا عدد a را بیابیم. عبارت $\frac{1}{x-1}$ را برابر a قرار می‌دهیم تا ببینیم که جواب x بر حسب a چگونه است:

$$\frac{1}{x-1} = a \Rightarrow 1 = ax - a \Rightarrow 1 + a = ax \Rightarrow x = \frac{a+1}{a}$$

اگر بخواهیم عبارت $\frac{a+1}{a}$ معنی نداشته باشد باید $a = 0$ تا مخرج صفر شود و x نتواند برابر این عبارت قرار گیرد، پس $a = 0$ نمی‌تواند در برد $f(x)$ باشد و داریم:

$$f(0) = -1$$

در تابع $f(x) = x^2$ هر عدد به شکل $a +$ و $-a$ خروجی‌های یکسان دارند، پس می‌توان به هر یک از اعضا برد تابع، حداکثر دو عضو از دامنه مرتبط کرد یعنی اگر برد تابع ۴ عضوی باشد، دامنهٔ آن حداقل ۴ عضوی و حداکثر ۸ عضوی بوده است. به‌عنوان مثال:

$$D = \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\} \Rightarrow R = \{1, 4, 9, 16\}$$

اعضای برد تابع به این صورت هستند:

$$-\frac{1}{3}(1) + 10, -\frac{1}{3}(2) + 10, \dots, -\frac{1}{3}(9) + 10$$

پس مجموع اعداد برابر است با:

$$-\frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 9) + (9 \times 10)$$

مجموع اعداد ۱ تا ۹ را هم می‌توانید به شکل معمولی و هم با جمع جملات دنبالهٔ حسابی به دست آورید.

$$1 + 2 + \dots + 9 = 45$$

پس داریم:

$$-\frac{1}{3}(45) + 90 = 75$$

می‌دانیم تعداد اعضای دامنه باید از تعداد اعضای برد بیشتر و یا با آن مساوی باشند تا رابطه تابع باشد.

$$55 - 4n \geq 2n + 1 \Rightarrow 4n \leq 54 \Rightarrow n \leq 9$$

برد تابع یعنی تصویر نمودار بر محور y ها، بنابراین:

$$R_f = (0, +\infty) \cup \{-1\}$$

گزینه ۱: برای $y^2 = x$ کافی است $x = 1$ فرض شود که در این صورت $y = \pm 1$ می‌باشد که تابع نیست.

گزینه ۲: تابع است، زیرا:

$$x^3 + y^3 = 1 \Rightarrow y^3 = 1 - x^3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{1 - x^3}$$

گزینه ۳: در $|x| + |y| = 1$ کافی است $x = 0$ فرض شود، در نتیجه $y = \pm 1$ به دست می‌آید. بنابراین تابع نیست.

گزینه ۴: در $\sin y = x$ اگر $x = 0$ فرض شود، $\sin y = 0$ و در نتیجه $y = k\pi$ که باز هم تابع نیست.

اگر $a = 0$ باشد، باید $f(1) = f(2)$ باشد که ممکن نیست. با فرض $|a| = t$ و $a \neq 0$ داریم:

$$f(1-t) = f(2+t)$$

$$\Rightarrow 2(1-t) - 1 = (2+t)^2 - (2+t) - 2$$

$$\Rightarrow 2 - 2t - 1 = 4 + 4t + t^2 - 2 - t - 2$$

$$\Rightarrow t^2 + 5t - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \\ |a| = -6 \text{ غ.ق.ق} \end{cases}$$

بنابراین فقط برای دو مقدار a ، $f(1 - |a|) = f(2 + |a|)$ است.

$a \neq 0$ است، زیرا اگر $a = 0$ باشد باید $f(1) = f(0)$ شود که غیرممکن است. برای $a \neq 0$ داریم:

$$0 < \frac{a^2}{1+a^2} < 1 \Rightarrow -1 < \frac{-a^2}{1+a^2} < 0$$

$$1 + a^2 > 1$$

$$f(1+a^2) = f\left(\frac{-a^2}{1+a^2}\right) \Rightarrow 2 - 3(1+a^2) = -2\left(\frac{-a^2}{1+a^2}\right)$$

$$\xrightarrow{a^2=t} 2 - 3 - 3t = \frac{2t}{1+t} \Rightarrow (t+1)(4-3t) = 2t$$

$$\Rightarrow 4t - 3t^2 + 4 - 3t = 2t$$

$$\Rightarrow 3t^2 + t - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 = a^2 \Rightarrow a = \pm 1 \\ t_2 = -\frac{4}{3} = a^2 \Rightarrow a \in \emptyset \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 - (-1) = 2$$

$$f(a) + f(a^{\vee}) = \lambda \Rightarrow 3a + 1 + 3a^{\vee} + 1 = \lambda$$

$$\Rightarrow 3a^{\vee} + 3a - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -\vee \end{cases} \xrightarrow{a < 0} a = -\vee$$

$$f(1 + a^{\vee}) - f(1 - a) = f(\omega) - f(3) = 16 - 10 = 6$$

$$f(x - 3) + f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = -f(x - 3) \quad (\text{I})$$

در رابطه بالا اگر به جای x ، $x + 3$ قرار دهیم، داریم:

$$f(x + 3) = -f(x) \quad (\text{II})$$

دوباره این کار را تکرار می‌کنیم:

$$f(x + 3 + 3) = -f(x + 3) \Rightarrow f(x + 6) = -f(x + 3) \quad (\text{III})$$

از (I), (II), (III) داریم:

$$f(x + 6) = -f(x + 3) \xrightarrow{(\text{II})} f(x + 6) = -(-f(x)) = f(x)$$

$$\xrightarrow{(\text{I})} f(x + 6) = -f(x - 3)$$

ما حاصل $f(x + 6) + f(x - 3)$ را می‌خواهیم که از عبارت بالا صفر به دست می‌آید.

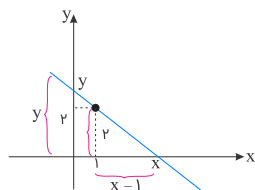
$$4x^{\vee} - 24x + 45 = 4(x - 3)^{\vee} + 9$$

$$6x^{\vee} - 36x + 56 = 6(x - 3)^{\vee} + 2$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{4x^{\vee} - 24x + 45}{6x^{\vee} - 36x + 56} = \frac{4(x - 3)^{\vee} + 9}{6(x - 3)^{\vee} + 2}$$

$$\Rightarrow f(3 + \sqrt{7}) = \frac{4(3 + \sqrt{7} - 3)^{\vee} + 9}{6(3 + \sqrt{7} - 3)^{\vee} + 2} = \frac{37}{44}$$

طبق قضیهٔ تالس داریم:



$$\frac{x-1}{x} = \frac{y}{y} \Rightarrow \frac{y}{y} = \frac{x}{x-1} \Rightarrow y = \frac{yx}{x-1}$$

پس:

$$S = \frac{1}{y}xy = \frac{1}{y}x \times \frac{yx}{x-1} = \frac{x^{\vee}}{x-1}$$

$$x = -2 \Rightarrow x^2 - 1 = 3 \Rightarrow x + 1 = 4$$

$$x = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = -1 \Rightarrow x + 1 = 0$$

$$x = -1 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x + 1 = 1$$

$$x = 3 \Rightarrow x^2 - 1 = 8 \Rightarrow x + 1 = 9$$

$$x = 5 \Rightarrow x^2 - 1 = 24 \Rightarrow x + 1 = 25$$

برد تابع: $\{0, 1, 4, 9, 25\}$

$$f(2 - \sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3} - \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$$

$$f(2 + \sqrt{3}) = 2 + \sqrt{3} - \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$$

$$f(2 - \sqrt{3}) + f(2 + \sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3} - \frac{1}{2 - \sqrt{3}} + 2 + \sqrt{3} - \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$$

$$= 4 - \left(\frac{1}{2 - \sqrt{3}} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \right)$$

در عبارت $\frac{1}{2 - \sqrt{3}} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$ مخرج مشترک می‌گیریم، مخرج‌ها مزدوج یکدیگر هستند:

$$4 - \left(\frac{(2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3})}{4 - 3} \right) = 4 - 4 = 0$$

اول: x را برابر ۲ قرار می‌دهیم تا مقدار $f(3)$ را محاسبه کنیم:

$$2f(x+1) - x^2 f(3) = 2x^2 - 4 \xrightarrow{x=2} 2f(3) - 4f(3) = 8 - 4 - 2f(3) = 4 \Rightarrow f(3) = -2$$

دوم: برای به دست آوردن $f(0)$ باید x را برابر ۱- بگذاریم:

$$2f(x+1) - x^2 f(3) = 2x^2 - 4 \xrightarrow{x=-1} 2f(0) - (-1)^2 \times (-2) = 2(-1)^2 - 4 \Rightarrow 2f(0) = -4 \Rightarrow f(0) = -2$$

برای راحتی فرض می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^y - \frac{1}{x^y} = A \\ x^y + \frac{1}{x^y} = B \end{cases}$$

پس به $f(A) = B$ می‌رسیم. ابتدا سعی می‌کنیم A و B را به هم نزدیک کنیم. برای این منظور آن‌ها را به توان دو می‌رسانیم:

$$x^y - \frac{1}{x^y} = A \Rightarrow (x^y - \frac{1}{x^y})^y = A^y \Rightarrow x^F + \frac{1}{x^F} - y = A^y \quad (1)$$

$$x^y + \frac{1}{x^y} = B \Rightarrow (x^y + \frac{1}{x^y})^y = B^y \Rightarrow x^F + \frac{1}{x^F} + y = B^y \quad (2)$$

از (۱) نتیجه می‌گیریم:

$$x^F + \frac{1}{x^F} = A^y + y$$

با جایگذاری در (۲) داریم:

$$\underbrace{x^F + \frac{1}{x^F}}_{A^y + y} + y = B^y \Rightarrow B^y = A^y + 2y$$

$$\Rightarrow B = \pm \sqrt{A^y + 2y}$$

از آنجاکه $B = x^y + \frac{1}{x^y}$ ، بنابراین B همواره مثبت است و فقط $B = \sqrt{A^y + 2y}$ قابل قبول می‌باشد. پس:

$$f(A) = B \Rightarrow f(A) = \sqrt{A^y + 2y}$$

$$f(x) = \sqrt{x^y + 2y} \quad \text{درواقع:}$$

اول: یک بار x را برابر (۱) و یک بار برابر (-۱) می‌گذاریم:

$$yf(x+y) - xf(y-x) = yx^y + 1$$

$$x = 1 \Rightarrow yf(y) - f(1) = y + 1 = y$$

$$x = -1 \Rightarrow yf(1) + f(y) = y + 1 = y$$

دوم: با حل دستگاه زیر مقدار $f(3)$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} yf(y) - f(1) = y \\ yf(1) + f(y) = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3f(3) - f(1) = 6 \\ 3f(1) + f(3) = 3 \end{cases}$$

طرفین معادلات فوق را باهم جمع می‌کنیم.

$$5f(3) = 6 + 3 = 9 \Rightarrow f(3) = \frac{9}{5}$$

برای اینکه ۳ نقطه، روی یک خط باشند، باید شیب گذرنده از هر دو نقطه، یکسان باشد:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$\frac{a - 2 - (-1)}{3 - 3a} = \frac{2/5 - (-1)}{-\frac{a}{3} - 3a} \Rightarrow \frac{(a-1)}{-3(a-1)} = \frac{3/5}{-a-9a}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{-10a}{3}} \Rightarrow -\frac{1}{3} = -\frac{1}{a} \Rightarrow a = 3$$

$$f(x) = -mx - h \xrightarrow{(-2,3)} 2m - h = 3 \Rightarrow h = 2m - 3$$

$$g(x) = ax + h \xrightarrow{(-2,3)} -2a + h = 3 \Rightarrow -2a + 2m = 6$$

$$\Rightarrow -a + m = 3 \Rightarrow m = 3 + a$$

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = g(-5) \Rightarrow \frac{5m}{3} - h = -5a + h$$

$$\Rightarrow 5m + 20a - 4h = 0 \Rightarrow 5m + 20a - 4(2m - 3) = 0$$

$$\Rightarrow 5(a + 3) + 20a - 16(a + 3) + 12 = 0$$

$$\Rightarrow 5a + 15 + 20a - 16a - 48 + 12 = 0$$

$$\Rightarrow 9a = 9 \Rightarrow a = 1$$

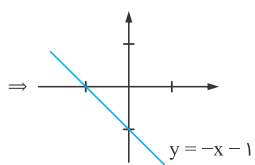
$$\Rightarrow m = 1 + 3 = 4$$

$$\Rightarrow \frac{m}{a} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\begin{cases} (-1, 0) \\ (-3, 2) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{2 - 0}{-3 + 1} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$\Rightarrow y = mx + h \xrightarrow{(-1,0)} 0 = -1(-1) + h \Rightarrow h = -1$$

$$\Rightarrow y = -x - 1$$



از ناحیهٔ اول عبور نمی‌کند.

نمودار تابع خطی f از نقاط $(2, 5)$ و $(0, -1)$ می‌گذرد، پس می‌توان نوشت:

$$f(x) = ax + b \Rightarrow \begin{cases} (0, -1) \Rightarrow 0 + b = -1 \Rightarrow b = -1 \\ (2, 5) \Rightarrow 2a - 1 = 5 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = 3x - 1 \Rightarrow f(6) = 17$$

$$f(x) = mx + n$$

$$f(-1) = 3 \Rightarrow -m + n = 3$$

$$x = 2 \text{ محور طول ها را در } x = 2 \text{ قطع می کند} \Rightarrow f(2) = 0 \Rightarrow 2m + n = 0$$

$$\begin{cases} 2m + n = 0 \\ -m + n = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2m + n = 0 \\ m - n = -3 \end{cases}$$

$$3m = -3 \Rightarrow m = -1 \xrightarrow{-m+n=3} 1 + n = 3 \Rightarrow n = 2$$

$$f(x) = -x + 2$$

برای به دست آوردن $f(2)$ داریم:

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = 2 + 3 - 2f(0) \Rightarrow f(2) = 5 - 2f(0) \quad (1)$$

حال $f(0)$ را از ضابطه تابع به دست می آوریم:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 + 3 - 2f(0) \Rightarrow 3f(0) = 3 \Rightarrow f(0) = 1 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2), (1)} f(2) = 5 - 2 \times (1) = 3$$

با داشتن ضابطه تابع و جایگذاری مقادیر برد تابع به جای $f(x)$ مقادیر x دامنه تابع را به دست می آوریم:

$$f(x) = \frac{x+3}{x} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = -1 \Rightarrow \frac{x+3}{x} = -1 \Rightarrow x+3 = -x \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \\ f(x) = -2 \Rightarrow \frac{x+3}{x} = -2 \Rightarrow -2x = x+3 \Rightarrow x = -1 \\ f(x) = 2 \Rightarrow \frac{x+3}{x} = 2 \Rightarrow 2x = x+3 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

پس مجموعه دامنه تابع $\{-1, -\frac{3}{2}, 3\}$ است.

$$f(x) = (x-1)(x+1) = x^2 - 1$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{3}-1) = (\sqrt{3}-1)^2 - 1 = 3 + 1 - 2\sqrt{3} - 1 = 3 - 2\sqrt{3}$$

$$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{3}-1) - f(\sqrt{2}) = 3 - 2\sqrt{3} - 1 = 2 - 2\sqrt{3}$$

نقطه (α, β) را در تابع صدق می‌دهیم:

$$\begin{aligned}\beta &= (1 - \gamma m)\alpha - \frac{\gamma m + \gamma}{\gamma} \Rightarrow \gamma \beta = \gamma(1 - \gamma m)\alpha - \gamma m - \gamma \\ \Rightarrow \gamma \beta &= \gamma \alpha - \gamma m \alpha - \gamma m - \gamma \Rightarrow \gamma m \alpha + \gamma m = \gamma \alpha - \gamma \beta - \gamma \\ \Rightarrow (\gamma \alpha + 1)\gamma m &= \gamma \alpha - \gamma \beta - \gamma\end{aligned}$$

برای این که m بی‌اثر باشد لازم است:

$$\begin{aligned}\gamma \alpha + 1 &= 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{\gamma} \\ \gamma \alpha - \gamma \beta - \gamma &= 0 \Rightarrow \alpha - \beta = \frac{\gamma}{\gamma} \Rightarrow \beta - \alpha = -\frac{\gamma}{\gamma}\end{aligned}$$

باتوجه به ضابطه تابع خطی f ، مقادیر داده‌شده را در آن صدق می‌دهیم:

$$\begin{aligned}f(1) &= \gamma a - 1 \Rightarrow \gamma a - 1 = \frac{-\gamma}{a + \gamma} + b \\ f\left(-\frac{a}{\gamma}\right) &= \gamma \Rightarrow \gamma = \frac{-\gamma}{a + \gamma} \times \frac{-a}{\gamma} + b\end{aligned}$$

اگر رابطه دوم را در منفی ضرب کنیم و با رابطه اول جمع کنیم b حذف می‌شود:

$$\begin{aligned}\gamma a - 1 - \gamma &= \frac{-\gamma}{a + \gamma} - \frac{\gamma a}{a + \gamma} \Rightarrow \gamma a - \gamma = \frac{-\gamma - \gamma a}{a + \gamma} \Rightarrow \gamma a - \gamma = \frac{-\gamma(a + 1)}{a + \gamma} \\ \Rightarrow \gamma a - \gamma &= -\gamma \Rightarrow a = \frac{1}{\gamma}\end{aligned}$$

مقدار a به دست آمده را در رابطه اول می‌گذاریم تا b به دست آید:

$$\gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right) - 1 = \frac{-\gamma}{\frac{1}{\gamma} + \gamma} + b \Rightarrow 0 = \frac{-\gamma}{\frac{1}{\gamma}} + b \Rightarrow b = \frac{1}{\gamma}$$

بنابراین:

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{1}{\gamma}}{\frac{1}{\gamma}} = \frac{16}{5} = \gamma/\gamma$$

دو خط موازی هستند پس شیب‌های آن‌ها برابر است، یعنی:

$$\left. \begin{aligned} y &= mx + h \\ 2y &= 3x - b \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{b}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow m = \frac{3}{2}$$

اگر $f(2) = 2a - 1$ پس:

$$\frac{3}{2} \times 2 + h = 2a - 1 \Rightarrow h = 2a - 4$$

و $f(1 - a) = 2$ یعنی:

$$\frac{3}{2} \times (1 - a) + h = 2 \Rightarrow 3 - 3a + 2h = 4$$

بنابراین اگر h را جاگذاری کنیم:

$$3 - 3a + 2(2a - 4) = 4 \Rightarrow 3 - 3a + 4a - 8 = 4 \Rightarrow a = 9$$

در نتیجه:

$$h = 2a - 4 = 18 - 4 = 14$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{2}x + 14 \Rightarrow f(-6) = -9 + 14 = 5$$

طبق رابطه داده‌شده داریم:

$$\begin{aligned} F_2 - F_1 &= \Delta I \Rightarrow \left(\frac{9}{\Delta} C_2 + 32\right) - \left(\frac{9}{\Delta} C_1 + 32\right) = \Delta I \\ \Rightarrow \frac{9}{\Delta} (C_2 - C_1) &= \Delta I \Rightarrow C_2 - C_1 = 45 \end{aligned}$$

$$f(2) = 2(2) + 1 \Rightarrow f(2) = 4 + 1 \Rightarrow f(2) = 5$$

$$f(f(2)) = f(5) = 2(5) + 1 \Rightarrow f(f(2)) = 11$$

نمودار از نقاط $(2, 1)$ و $(-2, 3)$ می‌گذرد، پس در ابتدا معادله خط را می‌نویسیم:

$$m = \frac{3 - 1}{-2 - 2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2$$

مساحت محصور:

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ y = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases} \Rightarrow S = \frac{1}{2}(4 \times 2) = \frac{1}{2}(4) = 4$$

چون $f(x) = ax + b$ خطی است، داریم:

بنابراین:

$$f(2 + \sqrt{3}) = \sqrt{3} = 2\sqrt{2}$$

$$f\left(\frac{-1}{2 + \sqrt{3}}\right) = \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} a(2 + \sqrt{3}) + b = 2\sqrt{2} \\ a(\sqrt{3} - 2) + b = \sqrt{2} \end{cases}$$

گویا کردن مخرج

با منهای کردن دو معادله بالا داریم:

$$fa = \sqrt{2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{f}$$

با قرار دادن در یکی از دو معادله داریم:

$$\frac{\sqrt{2}}{f}(2 + \sqrt{3}) + b = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow b = \frac{2}{f}\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{f} \Rightarrow f(x) = \frac{\sqrt{2}}{f}x + \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{f}$$

$$\Rightarrow f(2 - \sqrt{3}) = \frac{\sqrt{2}}{f}(2 - \sqrt{3}) + \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{f} = \frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{f} = \frac{4\sqrt{2} - 3\sqrt{6}}{f}$$

با داشتن دو نقطه از خط، شیب خط را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} (2, 0) \\ (0, -2) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{-2 - 0}{0 - 2} = 1$$

$$y = mx + h$$

یکی از نقاط مثلاً $(0, -2)$ را در معادله خط جایگذاری می‌کنیم:

$$-2 = 1(0) + h \Rightarrow h = -2 \Rightarrow y = x - 2 \Rightarrow y - x = -2$$

$$\begin{cases} f(1) = f \\ f(2x + 1) = 2f(x) + 2 \xrightarrow{x=1} f(2 + 1) = 2f(1) + 2 \Rightarrow f(3) = 2 + 2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(1) = f \\ f(3) = 4 \end{cases} \xrightarrow{f(x)=ax+b} \begin{cases} f(1) = 1a + b \\ f(3) = 3a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = f \\ 3a + b = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2a = 4 - f \Rightarrow a = 2 - \frac{f}{2} \Rightarrow b = 1 \Rightarrow f(x) = (2 - \frac{f}{2})x + 1$$

از متغیر شعاع (r) به‌عنوان واسطه کمک می‌گیریم.

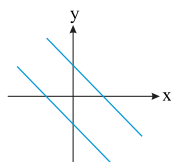
$$P = 2\pi r$$

$$S = \pi r^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{S}{\pi}} = r$$

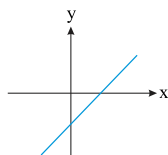
$$P = 2\pi r \Rightarrow P(S) = 2\pi \sqrt{\frac{S}{\pi}} = \frac{2\pi\sqrt{S}}{\sqrt{\pi}} = 2\sqrt{\pi S}$$

$$\Rightarrow P(S) = 2\sqrt{\pi S}$$

اگر شیب منفی باشد، در هر صورت از ناحیه دوم خواهد گذشت. شکل آن به صورت زیر خواهد بود:



اگر شیب نامنفی باشد، باید عرض از مبدأ غیرمثبت باشد تا از ناحیه دوم نگذرد که شکل آن به صورت زیر خواهد بود:



$$\begin{cases} m \geq 0 \\ m - 3 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq 3 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq m \leq 3$$

معادله خط گذرنده از $(1, -1)$ با شیب m را می‌نویسیم:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - (-1) = m(x - 1) \Rightarrow y + 1 = m(x - 1)$$

$$A : x = 0 \Rightarrow y + 1 = -m \Rightarrow y = -m - 1$$

عرض نقطه A منفی است، آن را قرینه می‌کنیم تا قاعده مثلث به دست آید:

$$OA = m + 1$$

$$B : y = 0 \Rightarrow 1 = m(x - 1) \Rightarrow x = \frac{1}{m} + 1 \Rightarrow OB = \frac{1}{m} + 1$$

برای محاسبه مساحت داریم:

$$S = \frac{1}{2} \times OA \times OB \Rightarrow S(m) = \frac{1}{2} \times (m + 1) \times \left(\frac{1}{m} + 1\right)$$

$$\Rightarrow S(m) = \frac{(m + 1)^2}{2m}$$

$$-3 \leq 3x - 2 < 2$$

$$-1 \leq 3x < 4 \Rightarrow \frac{-1}{3} \leq x < \frac{4}{3}$$

در رابطهٔ بین وزن و قد داریم:

$$w(h) = ۹ \circ h - ۹ \circ = ۹ \circ (h - ۱)$$

حال برای رابطهٔ BMI برحسب h داریم:

$$\begin{aligned} BMI(h) &= \frac{w(h)}{h^۲} = \frac{۹ \circ (h - ۱)}{h^۲} \xrightarrow{BMI=۲۲/\omega} \frac{۹ \circ (h - ۱)}{h^۲} = ۲۲/\omega \\ \Rightarrow \frac{۹h - ۹}{h^۲} &= ۱ \Rightarrow h^۲ = ۹h - ۹ \Rightarrow h^۲ - ۹h + ۹ = (h - ۲)^۲ = ۰ \\ \Rightarrow h &= ۲m = ۲ \circ \circ cm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^۲ - (a + b)x + ab + (a + b)x^۲ \\ &= (a + b + ۱)x^۲ - (a + b)x + ab \end{aligned}$$

می‌دانیم ضابطهٔ تابع خطی به‌صورت $y = \alpha x + \beta$ است، پس در اینجا ضریب $x^۲$ باید صفر باشد:

$$\Rightarrow a + b = -۱ \Rightarrow f(x) = x + ab$$

ازطرفی f از نقطهٔ $(-۲, ۳)$ نیز می‌گذرد و داریم:

$$\begin{aligned} ۳ &= -۲ + ab \Rightarrow ab = \omega \Rightarrow f(x) = x + \omega \\ \Rightarrow f(۲) &= ۷ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_f = (-۴, ۲] \Rightarrow -۴ < x \leq ۲ \xrightarrow{\times ۳} -۱۲ < ۳x \leq ۶ \\ \xrightarrow{+۱} -۱۱ < ۳x + ۱ \leq ۷ \Rightarrow R_f &= (-۱۱, ۷] \end{aligned}$$

این بازه شامل ۱۸ عدد صحیح است.

جعبه ابزار: توابع درجه دوم - خواص دامنه و برد

$$y = ax^۲ + bx + c \xrightarrow{a \neq ۰} \begin{cases} R_y = [\frac{-\Delta}{۴a}, +\infty), a > ۰ \\ R_y = (-\infty, \frac{-\Delta}{۴a}], a < ۰ \end{cases}$$

$$\Delta = ۱ - ۴(m - ۱)(۳) \Rightarrow ۱ + ۱۲ - ۱۲m$$

$$\frac{-\Delta}{۴a} = -۲ \Rightarrow \frac{۱۳ - ۱۲m}{۴m - ۴} = ۲ \Rightarrow ۱۳ - ۱۲m = ۸m - ۸ \Rightarrow ۲ \circ m = ۲۱$$

$$I) m = \frac{۲۱}{۲ \circ} \text{ ق.ق}$$

$$II) a > ۰ \Rightarrow m - ۱ > ۰ \Rightarrow m > ۱$$

$$\xrightarrow{I, II} \text{ سازگار}$$

چالش سوال: خواص توابع درجه دوم - توانایی حساب کردن برد و فرمول‌های آن

$$f(\circ) = ۲f(۱) = ۴f(۲) = ۴ \Rightarrow \begin{cases} f(\circ) = ۴ \\ f(۱) = ۲ \\ f(۲) = ۱ \end{cases}$$

با جایگذاری این مقادیر در تابع داریم:

$$\begin{aligned} f(\circ) = ۴ &\Rightarrow ۴ = \circ + \circ + c \Rightarrow c = ۴ \\ f(۱) = ۲ &\Rightarrow ۲ = a + b + ۴ \Rightarrow a + b = -۲ \\ f(۲) = ۱ &\Rightarrow ۱ = ۴a + ۲b + ۴ \Rightarrow ۴a + ۲b = -۳ \end{aligned}$$

دستگاه دو معادله دو مجهول حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} a + b = -۲ &\Rightarrow -۲a - ۲b = ۴ \\ ۴a + ۲b = -۳ &\Rightarrow ۴a + ۲b = -۳ \\ \xrightarrow{+} ۲a = ۱ &\Rightarrow a = \frac{1}{۲}, b = -\frac{5}{۲} \end{aligned}$$

پس داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{۲}x^۲ - \frac{5}{۲}x + ۴ \\ f(-۱) &= \frac{1}{۲} + \frac{5}{۲} + ۴ = ۷ \end{aligned}$$

چون دو نمودار در $x = ۱$ متقاطع هستند، پس داریم: $f(۱) = g(۱)$

$$\begin{cases} f(x) = ax^۲ + ۲x - ۱ \\ g(x) = x^۲ - (a-۱)x + ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(۱) = a + ۲ - ۱ = a + ۱ \\ g(۱) = ۱ - (a-۱) + ۱ = -a + ۳ \end{cases}$$

$$a + ۱ = -a + ۳ \Rightarrow ۲a = ۲ \Rightarrow a = ۱$$

پس عرض نقطه تقاطع برابر است با:

$$\Rightarrow f(x) = x^۲ + ۲x - ۱ \Rightarrow f(۱) = ۱ + ۲ - ۱ = ۲$$

$$\begin{aligned} f(x) + f(۳) &= ۲x^۲ + x + ۱ \xrightarrow{x=۳} ۲f(۳) = ۲(۹) + ۳ + ۱ = ۲۲ \Rightarrow f(۳) = ۱۱ \\ \Rightarrow f(x) &= ۲x^۲ + x + ۱ - ۱۱ \Rightarrow f(x) = ۲x^۲ + x - ۱۰ \\ \xrightarrow{x=۱} f(۱) &= ۲(۱) + ۱ - ۱۰ = -۷ \end{aligned}$$

ابتدا با توجه به ضابطه تابع $f(x)$ ، ضابطه دو تابع $f(۱+x)$ و $f(۱-x)$ را تشکیل می‌دهیم. یعنی یک بار در ضابطه $f(x)$ به جای متغیر x ، متغیر $(۱+x)$ و یک بار متغیر $(۱-x)$ را قرار داده و ضابطه هر یک را تعیین می‌کنیم.

$$\begin{aligned} f(۱+x) &= (۱+x)^۲(۲-۱-x)^۲ = (۱+x)^۲(۱-x)^۲ = [(۱+x)(۱-x)]^۲ = (۱-x^۲)^۲ \\ f(۱-x) &= (۱-x)^۲(۲-۱+x)^۲ = (۱-x)^۲(۱+x)^۲ = [(۱-x)(۱+x)]^۲ = (۱-x^۲)^۲ \end{aligned}$$

با داشتن ضوابط دو تابع $f(۱+x)$ و $f(۱-x)$ ، حاصل $f(۱+x) - f(۱-x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(۱+x) - f(۱-x) = (۱-x^۲)^۲ - (۱-x^۲)^۲ = ۰$$

$$\begin{aligned} f(x-1) &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1 + 5 \\ \Rightarrow f(x-1) &= (x-1)^3 + 6 \xrightarrow{x-1=t} f(t) = t^3 + 6 \\ \Rightarrow f(\sqrt[3]{6}) &= (\sqrt[3]{6})^3 + 6 = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= [\omega x^2 - ax^2 + abx - x + b]c \\ &= [(\omega - a)x^2 + (ab - 1)x + b]c \end{aligned}$$

$f(x)$ تابعی ثابت است، پس ضرایب x و x^2 باید برابر صفر باشند:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \omega - a = 0 \Rightarrow a = \omega \\ ab - 1 = 0 \Rightarrow \omega b - 1 = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{\omega} \end{cases} \\ \Rightarrow f(x) = bc = \frac{1}{\omega}c \\ f(x+y) = f(x)f(y) - 2 \Rightarrow \frac{1}{\omega}c = \frac{1}{2\omega}c^2 - 2 \\ \xrightarrow{\times 2\omega} \omega c = c^2 - 2\omega \Rightarrow c^2 - \omega c - 2\omega = 0 \\ \Rightarrow (c - 1\omega)(c + \omega) = 0 \Rightarrow c = 1\omega, c = -\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{(m, 3m-1), (-1, k^2-k), (k^2-k, 2)\} \\ k^2-k=2 \Rightarrow (k+1)(k-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} k=-1 \\ k=2 \end{cases} \\ 3m-1=2 \Rightarrow 3m=3 \Rightarrow m=1 \\ \text{حاصل ضرب اعضای دامنه} = (m)(-1)(k^2-k) = 1 \times (-1) \times (2) = -2 \end{aligned}$$

اگر f تابعی ثابت باشد پس $f(x) = c$ یعنی:

$$f(kx) = (k^2 - 3)f(x) \Rightarrow c = (k^2 - 3)c \Rightarrow k^2 - 3 = 1 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = 2$$

چون تابع g همانی است پس:

$$\begin{aligned} k = n^2 - 3n + 4 \Rightarrow n^2 - 3n + 2 = 0 \Rightarrow (n-1)(n-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n=1 \\ n=2 \end{cases} \\ 2n = m^2 - 4m + 4 \xrightarrow{n=2} (m-2)^2 = 4 \Rightarrow m-2 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} m=4 \\ m=0 \end{cases} \text{ غ ق غ ق} \\ f(n) = n - 4 \Rightarrow n - 4 = c \Rightarrow c = 2 - 4 \Rightarrow c = -2 \\ \Rightarrow f(m) = c \Rightarrow f(m) = -2 \end{aligned}$$

توجه کنید که با $n = 1$ مقادیری که برای m به دست می‌آید طبیعی نیست.

نکته: ضابطه تابع همانی به صورت $f(x) = x$ است.

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}\frac{x^3 - x}{ax^2 + bx + c} = x &\Rightarrow x^3 - x = x(ax^2 + bx + c) \\ \Rightarrow x^3 - x &= ax^3 + bx^2 + cx\end{aligned}$$

باید تک‌تک ضرایب چندجمله‌ای‌ها باهم برابر باشند، در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}a = 1, b = 0, c = -1 \\ \Rightarrow 2a + b - c = 2(1) + 0 - (-1) = 3\end{aligned}$$

f باید یک تابع همانی باشد، پس:

$$\begin{aligned}6a^2 - a - 2 = -1 &\Rightarrow 6a^2 - a - 1 = 0 \\ \Delta = 25\end{aligned}$$

حل به کمک روش دلتا:

$$\begin{aligned}a = \frac{+1 \pm 5}{2(6)} &\Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_2 = -\frac{1}{3} \end{cases} \\ (a+1)^2 = \frac{4}{9} &\Rightarrow a+1 = \pm \frac{2}{3} \\ \Rightarrow \begin{cases} a+1 = \frac{2}{3} \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \\ a+1 = -\frac{2}{3} \Rightarrow a = -\frac{5}{3} \end{cases}\end{aligned}$$

فقط $a = -\frac{1}{3}$ شرط قرار داشتن هر دو نقطه روی نیمساز را برآورده کرده است. پس با جایگذاری در نقطهٔ اول داریم:

$$b = -3a + 2 = -3\left(-\frac{1}{3}\right) + 2 = 1 + 2 = 3$$

نکته: ضابطهٔ تابع ثابت به صورت $f(x) = k$ است، بنابراین:

$$\begin{aligned}\frac{3x - n}{2 + x} = k &\Rightarrow 3x - n = 2k + xk \\ \xrightarrow{\text{برای هر } x \text{ برقرار است}} &\begin{cases} k = 3 \\ n = -2k \Rightarrow n = -6 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 3\end{aligned}$$

حاصل عبارت موردنظر را حساب می‌کنیم:

$$\frac{(n-1)f(n)}{21} = \frac{(-7) \times 3}{21} = -1$$

نکته: ضابطه تابع همانی به صورت $f(x) = x$ است، پس ضابطه g را برابر با x قرار می‌دهیم:

$$\frac{(2a+1)x^2+2x}{-x+b+1} = x \Rightarrow (2a+1)x^2+2x = x(-x+b+1)$$

$$\Rightarrow (2a+1)x^2+2x = -x^2+(b+1)x$$

$$\xrightarrow[\text{دو رابطه}]{\text{شرط تساوی}} \begin{cases} 2a+1 = -1 \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1 \\ b+1 = 2 \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a \times b}{2} = \frac{(-1) \times (1)}{2} = \frac{-1}{2}$$

در نمایش پیکانی برای این که تابع ثابت باشد باید تمام پیکان‌ها به یک عدد وارد شوند؛ بنابراین باید اعداد n و $m+2$ و -2 با هم برابر باشند.

$$n = -2$$

$$m+2 = -2 \Rightarrow m = -4 \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{-4}{-2} = 2$$

نکته: می‌دانیم ضابطه تابع همانی به صورت $f(x) = x$ است.

پس داریم:

$$\begin{cases} a-2=1 \Rightarrow a=3 \quad (*) \\ a^2-2b=0 \xrightarrow{(*)} 2b=9 \Rightarrow b=\frac{9}{2} \\ c+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow c=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+b+c = 3 + \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 3+4=7$$

چون f تابعی ثابت است پس $a = 0$ است و $f(x) = b$ خواهد بود. با استفاده از رابطه داده شده مقدار b را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x+1) = (f(2x))^2 - 2$$

$$\Rightarrow b = b^2 - 2 \Rightarrow b^2 - b - 2 = 0 \Rightarrow (b+1)(b-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -1 & \text{غ ق ق} \\ b = 2 & \text{ق ق} \end{cases}$$

حاصل عبارت خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$\frac{f(100) \times f(6)}{f(b)} = \frac{2 \times 2}{2} = 2$$

نکته: تابعی که برد آن شامل تنها یک عضو باشد، تابع ثابت نامیده می‌شود.

باید تابع‌هایی که دامنه آن‌ها شامل سه عضو $\{1, 2, 3\}$ باشد و برد آن‌ها فقط شامل یکی از عضوهای A باشد را بیابیم. بنابراین سه تابع از A به A وجود دارد که تابعی ثابت است.

$$f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1\}$$

$$h: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{3\}$$

$$g: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{2\}$$

باتوجه به اینکه صورت کسر درجه دوم است، پس باید مخرج هم درجه دوم باشد. $g(x) + x$ را باید طوری انتخاب کنیم که ریشه‌هایش ۱ و ۲ باشد، پس مخرج را $A(x-1)(x-2)$ در نظر می‌گیریم.

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{A(x-1)(x-2)} = \frac{x^2 + ax + b}{Ax^2 - 3Ax + 2A}$$

چون $f(x)$ تابع ثابت است، پس:

$$\frac{1}{A} = \frac{a}{-3A} = \frac{b}{2A} \Rightarrow 1 = \frac{a}{-3} = \frac{b}{2} \Rightarrow a = -3, b = 2$$

برد تابع تک عضوی است پس تابع صورت سؤال ثابت است و باید تمام ضرایب دارای x آن را از بین ببریم:

$$\begin{cases} a^2 - 1 = 0 \\ a + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -1$$

$$f(x) = -1$$

پس $b = -1$ تنها عضو برد تابع است.

f تابعی خطی است و به فرم $f(x) = ax + b$ است و همچنین از نقاط $(1, -1)$ و $(2, 2)$ می‌گذرد، پس مختصات نقاط باید در معادله تابع صدق کنند.

$$\begin{aligned} (2, 2) \in f &\Rightarrow 2a + b = 2 \\ (1, -1) \in f &\Rightarrow a + b = -1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 3x - 4$$

یک تابع در صورتی تابع همانی است که $f(x) = x$ باشد. بنابراین:

$$f(x) - 2x + 4 = 3x - 4 - 2x + 4 = x \Rightarrow \text{گزینه ۳}$$