



اعمال جبری روی توابع

۱- دامنه مشترک توابع را پیدا می‌کنیم.

۲- در دامنه مشترک، عمل جبری گرفته شده را انجام می‌دهیم:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \times g(x), D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, D_{\left(\frac{f}{g}\right)} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

۳- اگر تابع $f(x)$ را داشته باشیم و بخواهیم توابعی مانند $af(x) + b$, $f^n(x)$, $\frac{1}{f(x)}$, $\sqrt{f(x)}$ و ... را حساب

کنیم، این اعمال فقط روی خروجی‌های تابع اعمال می‌شوند. (اعمال بیرون پرانتزی)

مثال:

$$f = \{(1, 2), (3, 5)\} \Rightarrow f^2 + 1 = \{(1, 2^2 + 1), (3, 5^2 + 1)\}$$

مثال: اگر $(3f + 2g)(x) = x^2 + x$ و $(f - g)(x) = 3x + 2$ باشد، حاصل $\frac{f(1)}{g(-2)}$ کدام است؟

پاسخ: با قرار دادن $x = 1$ در هر دو رابطه، داریم:

$$\begin{cases} 3f(1) + 2g(1) = 2 \\ f(1) - g(1) = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3f(1) + 2g(1) = 2 \\ 2f(1) - 2g(1) = 10 \end{cases} \Rightarrow 5f(1) = 12 \Rightarrow f(1) = \frac{12}{5}$$

حالا با قرار دادن $x = -2$ در هر دو رابطه داریم:

$$\begin{cases} 3f(-2) + 2g(-2) = 2 \\ f(-2) - g(-2) = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3f(-2) + 2g(-2) = 2 \\ 3f(-2) - 3g(-2) = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5g(-2) = 14 \\ g(-2) = \frac{14}{5} \end{cases}$$

$$\frac{f(1)}{g(-2)} = \frac{\frac{12}{5}}{\frac{14}{5}} = \frac{6}{7}$$

بنابراین:

$$f(x) = \sqrt{4-x^2}, g(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$D_f = [-2, +2], D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$f + g =$$

$$D_{f+g} =$$

$$\frac{f}{g} =$$

$$D_{\frac{f}{g}} =$$

تست: اگر $f = \{(1, a^2 - 2), (2, a + 1), (a + 1, 3), (1, a)\}$ و همچنین $g = \{(a, a + 2), (3, a), (2, 3), (1, 1)\}$ دو تابع

باشند، آنگاه برد تابع $y = 2f - g$ کدام است؟

(۱) $\{2, -3\}$ (۲) $\{-2, 3\}$ (۳) $\{-3\}$ (۴) $\{2\}$

گزینه (۳) - ابتدا با توجه به تابع بودن f مقدار a را پیدا می‌کنیم:

$$(1, a^2 - 2), (1, a) \in f \xrightarrow{\text{تابع } f} a^2 - 2 = a \Rightarrow \boxed{a^2 - a - 2 = 0} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}$$

$$(a-2)(a+1) = 0$$

۱- اگر $a = 2$ باشد، داریم:

$$f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3)\}, g = \{(2, 4), (3, 2), (2, 3), (1, 1)\}$$

همان طور که می‌بینید $(2, 4), (2, 3) \in g$ که در این حالت g تابع نیست. $\times$

۲- اگر $a = -1$ باشد، داریم:

$$f = \{(1, -1), (2, 0), (0, 3)\}, g = \{(-1, 1), (3, -1), (2, 3), (1, 1)\}$$

در این حالت هر دو تابع هستند. حال باید $2f - g$ را حساب کنیم:

$$2f = \{(1, -2), (2, 0), (0, 6)\} \Rightarrow 2f - g = \{(1, -2-1), (2, 0-3)\} = \{(1, -3), (2, -3)\} \Rightarrow R_{2f-g} = \{-3\}$$

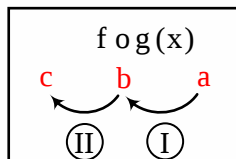


ترکیب توابع [تابع مرکب]

۱- ترکیب دو تابع

اگر f و g دو تابع باشند، تابع $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ را ترکیب تابع f با تابع g می‌گوییم و به طور خلاصه آن را با نماد $f \circ g$ نمایش می‌دهیم. [البته به شرطی که خروجی‌های تابع g در دامنه تابع f قرار داشته باشند.]

۲- مفهوم ترکیب تابع به کمک فلش‌ها



I- ورودی (a) ابتدا وارد تابع درونی (g) می‌شود و b از آن خارج می‌شود.

II- خروجی تابع درونی (b) وارد تابع بیرونی (f) می‌شود و از آن c خارج می‌شود.

به عبارت دیگر تابع مرکب، تابعی است که به یکباره به ازای ورودی a، خروجی c را می‌دهد.

با توجه به این توضیحات داریم:

a ورودی توابع g و f است.

b خروجی تابع g و ورودی تابع f است.

c خروجی توابع f و f است.

۳- ترکیب توابع زوج مرتبی: اگر توابع f و g را به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها بدهند و از ما تابع $f \circ g$

را بخواهند، از تابع درونی یعنی $g(x)$ شروع می‌کنیم. اگر زوج مرتب (a, b) عضوی از تابع g باشد، در تابع

بیرونی یعنی $f(x)$ به دنبال زوج مرتبی می‌گردیم که مؤلفه اولش b باشد، اگر زوج مرتب (b, c) را در تابع f

یافتیم آن گاه نتیجه می‌گیریم که زوج مرتب (a, c) در تابع $f \circ g$ قرار دارد، به عبارت دیگر:

$$a \xrightarrow{g} b \xrightarrow{f} c \Rightarrow (a, c) \in f \circ g$$

مثال: اگر $f = \{(3, 3), (4, -2)\}$ و $g = \{(3, 0), (-2, 3)\}$ باشد، توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست آورید

پاسخ: برای به دست آوردن $f \circ g$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} 3 \xrightarrow{g} 0 \xrightarrow{f} \text{تعریف نشده} \\ -2 \xrightarrow{g} 3 \xrightarrow{f} 3 \end{array} \Rightarrow f \circ g = \{(-2, 3)\}$$



برای به دست آوردن $g \circ f$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 3 &\xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{g} 0 \\ 4 &\xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} 3 \end{aligned} \Rightarrow g \circ f = \{(3, 0), (4, 3)\}$$

۴- یافتن ضابطه تابع مرکب: اگر ضابطه توابع f و g را به ما بدهند و ضابطه $f \circ g$ را بخواهند، کافیست در تابع f به جای همه x ها، ضابطه $g(x)$ را قرار دهیم.

مثال: اگر $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = \sqrt[3]{x} - 1$ باشد، ضابطه $g \circ f$ را به دست آورید.

پاسخ: چون $g(f(x))$ را می‌خواهیم در ضابطه تابع g به جای x ها عبارت $x^2 + 1$ را قرار دهیم:

$$g(f(x)) = \sqrt[3]{x^2 + 1} - 1$$

۵- یافتن $(f \circ g)(a)$:

برای پیدا کردن $(f \circ g)(a)$ معمولاً دو راه وجود دارد. هم می‌توانید ضابطه $f \circ g$ را تعیین کنید و سپس به جای x ها مقدار a را قرار دهید و هم می‌توانید ابتدا $g(a)$ را تعیین کنید و مقدار تابع f را به ازای $g(a)$ به دست آورید.

مثال: اگر $f(x) = \cos x$ و $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ باشد، حاصل $(g \circ f)(\frac{\pi}{4})$ کدام است؟

پاسخ: بهتر است ابتدا $f(\frac{\pi}{4})$ را به دست آوریم و سپس عدد به دست آمده را در g جای‌گذاری کنیم.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (g \circ f)\left(\frac{\pi}{4}\right) = g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = 1$$

۶- پیدا کردن ضابطه تابع درونی با معلوم بودن تابع مرکب: برای تعیین ضابطه $g(x)$ با داشتن $f \circ g(x)$ و $f(x)$ باید دو مرحله زیر را طی کنیم:

۱- در تابع $f(x)$ به جای همه x ها، $g(x)$ قرار دهیم تا $f(g(x))$ به دست آید.

۲- تابع $f(g(x))$ به دست آمده را مساوی با ضابطه $f \circ g(x)$ که در مسئله داده شده، قرار می‌دهیم و معادله را برحسب $g(x)$ حل می‌کنیم.





مثال: اگر $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ و $(f \circ g)(x) = x - 3$ باشد، ضابطه تابع g را به دست آورید.

پاسخ: طبق صورت سؤال $f(g(x)) = x - 3$ است، پس در تابع f به جای همه x ها، $g(x)$ می‌گذاریم و داریم:

$$f(g(x)) = \frac{2g(x)+1}{g(x)-2} = x - 3 \Rightarrow 2g(x) + 1 = (x - 3)(g(x) - 2) = xg(x) - 3g(x) - 3x + 6$$

$$\Rightarrow xg(x) - 5g(x) = 3x - 8 \Rightarrow g(x)(x - 5) = 3x - 8 \Rightarrow g(x) = \frac{3x-8}{x-5}$$

۷- پیدا کردن ضابطه تابع بیرونی با معلوم بودن تابع مرکب: برای تعیین ضابطه f با داشتن $f \circ g$ و g باید از

تغییر متغیر استفاده کنیم. به این ترتیب که:

۱- ضابطه تابع $g(x)$ را فرض کرده و مقدار x را بر حسب t به دست می‌آوریم.

۲- در تابع مرکب داده شده به جای x ، عبارت به دست آمده بر حسب t را قرار می‌دهیم تا تابع f بر حسب t ،

یعنی $f(t)$ به دست آید.

مثال: اگر $g(x) = \frac{x-1}{2}$ و $(f \circ g)(x) = x^2 + 2$ باشد، تابع $f(x)$ را به دست آورید.

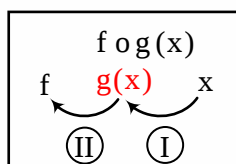
پاسخ: با در نظر گرفتن $g(x) = t$ ، خواهیم داشت:

$$\frac{x-1}{2} = t \Rightarrow x = 2t + 1 \Rightarrow f(g(x)) = f\left(\frac{x-1}{2}\right) = x^2 + 2$$

$$\Rightarrow f(t) = (2t+1)^2 + 2 = 4t^2 + 4t + 3$$

بنابراین $f(x) = 4x^2 + 4x + 3$ خواهد بود.

۸- دامنه تابع مرکب:



۱- ورودی x ابتدا وارد تابع درونی می‌شود پس باید:

۲- خروجی تابع درونی وارد تابع بیرونی می‌شود پس باید:

در نتیجه به طور کلی داریم:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

و به طریق مشابه می‌توان نشان داد:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}, \quad D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\}$$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = \frac{2x+6}{x+12}$ باشد، دامنه تابع $(f \circ g)(x)$ کدام است؟

پاسخ: چون $D_f(x) = [1, \infty)$ بنابراین برای پیدا کردن دامنه $f \circ g$ به صورت زیر عمل می کنیم:

$$۱) x \in D_g \Rightarrow x \neq -12$$

$$۲) g(x) \in D_f \Rightarrow \frac{2x+6}{x+12} \geq 1$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{2x+6}{x+12} \geq 1 \Rightarrow \frac{2x+6}{x+12} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{x-6}{x+12} \geq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} - [-12, 6)$$

۹- تعیین برد تابع مرکب: برای تعیین برد تابع $f \circ g(x)$ باید مراحل زیر را انجام دهیم:

۱- ابتدا برد تابع درونی یعنی g را تعیین کنیم.

۲- برد تابع درونی را به عنوان دامنه تابع بیرونی یعنی f در نظر می گیریم.

۳- برد تابع بیرونی را با دامنه جدید به دست می آوریم.

مثال: اگر $f(x) = 2x - [2x]$ و $g(x) = -x^2 + 4x$ باشند، برد تابع $g \circ f$ کدام است؟

پاسخ: می دانیم برد تابع $f(x) = 2x - [2x]$ بازه $[0, 1)$ است. بنابراین:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) \xrightarrow[\bullet \leq T < 1]{f(x)=T} g(T) = -T^2 + 4T ; T \in [0, 1)$$

$$\xrightarrow[T_s=2]{\text{در بازه نیست}} g(0) = 0, g(1) = 3 \Rightarrow \text{برد} = [0, 3)$$

تست) اگر $f(x) = x + [x]$ و $g(x) = f([x - f(x)])$ باشد، $f \circ g(-\frac{1}{3})$ کدام است؟ (تجربی - خارج ۱۴۰۲)

۴ (۴)

-۴ (۳)

۲ (۲)

-۲ (۱)

.....

.....

.....

.....



تست) اگر توابع f و g به عنوان ماشین به صورت $x \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow 2x$ باشند و $g(x) = 3x + 4$ مقدار $f(5)$ کدام است؟
(تجربی - خارج ۹۱)

۴ (۴

۳ (۳

۲ (۲

۱ (۱

.....

.....

.....

تست) اگر $g \circ f(x) = 5x^2 + 11$ و $f(x) = 2x$ باشد، کمترین مقدار $g(7-x)$ کدام است؟
(تجربی - داخل ۱۴۰۱)

۱۱ (۴

۹ (۳

۷ (۲

۳ (۱

.....

.....

.....

.....

تست) اگر $f(x) = \begin{cases} -1; & x < -1 \\ x; & -1 \leq x \leq 1 \\ 1; & x > 1 \end{cases}$ و $g(x) = 1 - x^2$ باشد، ماکزیمم مقدار تابع $g \circ f - f \circ g$ ، کدام است؟

(ریاضی - خارج ۱۴۰۰)

۱ (۴

 $\frac{1}{2}$ (۳

صفر (۲

-۱ (۱

.....

.....

.....

.....



(تست) اگر $f(x) = [x] - x$ و $g(x) = \frac{1-2x}{x+1}$ باشد، برد تابع $g \circ f$ کدام است؟ (تجربی - خارج ۹۹)

- (۱) $[-1, 1)$ (۲) $(-1, 1]$ (۳) $[1, +\infty)$ (۴) $(-\infty, 1]$

.....

.....

.....

.....

(تست) اگر $f(x) = \frac{\sqrt{2}x}{3x - \sqrt{2}}$ باشد، حاصل $f \circ f \circ f(\sqrt{2})$ کدام است؟ (ریاضی - داخل ۱۴۰۱)

- (۱) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{1}{2}$

.....

.....

.....

.....

(تست) اگر خروجی ماشین شکل مقابل $\frac{4}{3}$ باشد، مقدار ورودی کدام است؟

ورودی $\rightarrow 2x - 2 \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x} + 1} \rightarrow$ خروجی

- (۱) $\frac{11}{9}$ (۲) $\frac{7}{2}$ (۳) ۳ (۴) ۴

.....

.....

.....

.....



تست) اگر $f(x) = x^2 - [x]$ و $f(af(\sqrt{5})) = 2$ باشد، کدام می‌تواند مقدار a باشد؟ (کنکور اردیبهشت ۱۴۰۳)

$$-\frac{1}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{5} \quad (۳)$$

$$-\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۱)$$

تست) اگر $f(x) = x^2 - x - 2$ و $f(g(x)) = x^2 + x - 2$ ، آنگاه ضابطه تابع $y = (f + g)(x)$ کدام می‌تواند باشد؟

$$x^2 + 2x \quad (۴)$$

$$x^2 - 2x \quad (۳)$$

$$x^2 + 1 \quad (۲)$$

$$x^2 - 1 \quad (۱)$$

تست) اگر $f = \{(2, 3), (1, 2), (4, 5), (3, 7)\}$ و $g = \{(3, 2), (1, 3), (a, 1), (b, 3)\}$ باشد، آنگاه با فرض

$(4, 2) \in \text{fog}$ و $(4, 3) \in \text{gof}$ ، حاصل $2a - b$ کدام است؟

$$5 \quad (۴)$$

$$3 \quad (۳)$$

$$-4 \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

تست: اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ و $g(x) = x+4$ دو تابع باشند، جواب معادله $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ کدام است؟

(تجربی خارج - ۹۷)

$$۱, ۷ \quad (۴)$$

$$-۱, ۷ \quad (۳)$$

$$۱, -۷ \quad (۲)$$

$$-۱, -۷ \quad (۱)$$

گزینه (۱): اول $f \circ g(x)$ و $g \circ f(x)$ را محاسبه کنیم:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x+4) = \frac{2(x+4)-1}{(x+4)+2} = \frac{2x+7}{x+6}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) = \frac{2x-1}{x+2} + 4 = \frac{6x+7}{x+2}$$

حالا معادله را حل می‌کنیم:

$$\frac{2x+7}{x+6} = \frac{6x+7}{x+2} \Rightarrow \boxed{(2x+7)(x+2)} = \boxed{(6x+7)(x+6)}$$

$$2x^2 + 11x + 14 = 6x^2 + 43x + 42$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 32x + 28 = 0 \Rightarrow \boxed{x^2 + 8x + 7 = 0} \Rightarrow x = -7, -1$$

$$(x+7)(x+1) = 0$$

تابع یک به یک و وارون

۱- تابع یک به یک: تابع $f(x)$ را یک به یک می‌گوییم هرگاه از تساوی $f(x_1) = f(x_2)$ نتیجه بگیریم $x_1 = x_2$ ، به عبارتی تابعی یک به یک است که هر خروجی تنها متعلق به یک ورودی باشد و تشخیص آن به صورت زیر است:

۱- اگر تابع به صورت زوج مرتب داده شود، در صورتی یک به یک است که علاوه بر مؤلفه‌های اول، مؤلفه‌های دوم نیز متفاوت باشند.

۲- اگر تابع به صورت نموداری داده شود، در صورتی یک به یک است که هر خط موازی محور x ها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

۳- اگر تابع به صورت ضابطه‌ای داده شود، برای تشخیص یک به یک یا نبودن آن از مثال نقض یا رسم نمودار نیز می‌توان کمک گرفت.



مثال: با حذف حداقل چند عضو از رابطه $g = \{(1,1), (1,2), (3,2), (2,4), (3,4)\}$ به تابعی وارون پذیر (معکوس پذیر) می‌رسیم؟

پاسخ: باید یکی از دو عنصر $(1,1)$ یا $(1,2)$ حذف شوند وگرنه مجموعه داده شده اصلاً تابع نیست. بهتر است $(1,2)$ را حذف کنیم تا با توجه به $(3,2)$ به یک به یک بودن تابع هم کمکی کرده باشیم. حال باید یکی از عضوهای $(2,4)$ یا $(3,4)$ را حذف کنیم تا تابع مورد نظر یک به یک باشد. به علت وجود $(3,2)$ بهتر است $(3,4)$ را حذف کنیم. حالا به تابع $f = \{(1,1), (3,2), (2,4)\}$ رسیدیم که تابعی وارون پذیر است. یعنی با حذف حداقل ۲ عضو به تابعی یک به یک و وارون پذیر رسیدیم.

II- توابع یک به یک و غیریک به یک مهم:

۱- تابع هموگرافیک $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ همواره یک به یک است.

۲- توابع $y = a^x$ و $y = \log_a$ همواره یک به یک هستند.

۳- تابع $y = ax + b$ با شرط $a \neq 0$ یک به یک است.

۴- توابع $y = \sqrt[n]{x}$ و $y = x^{2n+1}$ همواره یک به یک است.

۵- توابع چند جمله‌ای از درجه زوج با دامنه $\mathbb{R}$ یک به یک نیستند.

۶- تابع $y = ax^2 + bx + c$ در بازه $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ یا $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ یک به یک است.

۷- تابع $y = a|x - \alpha| + b$ در بازه $[\alpha, +\infty)$ یا در بازه $(-\infty, \alpha]$ یک به یک است.

توجه: به طور کلی اگر تابع $y = f(x)$ در بازه‌ای اکیداً یکنوا باشد، در آن بازه یک به یک نیز هست.

III- تابع وارون (تابع معکوس): اگر جای x و y را جابه‌جا کنیم، به وارون تابع می‌رسیم و حال اگر وارون به دست آمده خود یک تابع باشد، تابع را وارون پذیر می‌گویند. [در توابعی که به صورت زوج مرتب نمایش داده شده‌اند برای به دست آوردن وارون، کفایت مؤلفه‌های اول و دوم را جابه‌جا کنیم].

$$f = \{(1,2), (4,6), (0,2)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(2,1), (6,4), (2,0)\}$$

چون وارون به دست آمده تابع نیست، پس f وارون پذیر نیست.

$$g = \{(6,0), (4,2), (-1,1)\} \Rightarrow g^{-1} = \{(0,6), (2,4), (1,-1)\}$$

چون وارون به دست آمده خود یک تابع است، پس g وارون پذیر است.

نتیجه: شرط لازم و کافی برای وارون پذیر بودن یک تابع، یک به یک بودن آن است.



نکته ۱: اگر $f(x) = ax^2 + bx + c$ در بازه I تعریف شده باشد، آنگاه $f(x)$ به شرطی وارون پذیر است که $x_s = -\frac{b}{2a}$ یا در بازه I نباشد یا نقطه ابتدایی یا انتهایی آن باشد.

نکته ۲: در توابعی به شکل $f(x) = ax + b \pm |cx + d|$ برای این که تابع یکنوا و یک به یک و در نتیجه وارون پذیر باشد، باید $|a| > |c|$ باشد. یعنی به طور خودمانی زور ضریب x بیرون قدر مطلق از زور ضریب x داخل قدر مطلق بیشتر باشد. [تا با تغییر علامت قدر مطلق، ضریب x در تابع f هم علامت با خود a باشد و تابع حالت هفتی یا هشتی (یک شاخه صعودی و یک شاخه نزولی) پیدا نکند.]

۱۷- ویژگی های مهم تابع وارون:

۱- برای یافتن ضابطه وارون تابع $y = f(x)$ باید جای x و y را عوض کنیم و سپس y را تنها کنیم. [اگر محدودیت دامنه مطرح بود، بهتر است x را برحسب y پیدا کنیم و سپس جای x و y را عوض کنیم.]

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x^5 + 2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{y^5 + 2}$$

$$\xrightarrow{\text{۳ توان}} x^3 = y^5 + 2 \Rightarrow x^3 - 2 = y^5 \xrightarrow{\sqrt[5]{}} y = \sqrt[5]{x^3 - 2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x^3 - 2}$$

۲- اگر نقطه $A(a, b)$ روی نمودار تابع f باشد، آنگاه نقطه $B(b, a)$ روی نمودار تابع f^{-1} قرار دارد و برعکس.

$$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$$

به عبارت دیگر:

۳- دامنه تابع f با برد تابع f^{-1} برابر است و همچنین برد تابع f نیز با دامنه تابع f^{-1} برابر است.

$$R_f = D_{f^{-1}}, D_f = R_{f^{-1}}$$

نکته ۱: اگر $f(x) = a - x$ باشد، آنگاه $f(x) = f^{-1}(x)$.

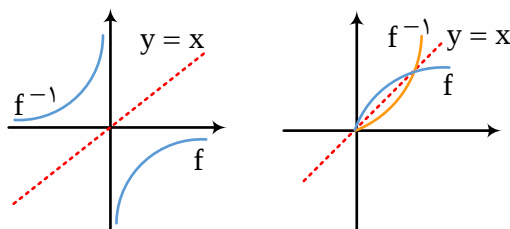
نکته ۲: اگر $f(x) = \frac{a}{x}$ باشد، آنگاه $f(x) = f^{-1}(x)$.

نکته ۳: اگر $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ باشد، آنگاه $f^{-1}(x) = \frac{-dx + b}{cx - a}$ در حالت خاصی که $d = -a$ است:

$$f(x) = f^{-1}(x)$$



۷- برای رسم نمودار f^{-1} از روی نمودار تابع f ، باید نمودار f را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم.



۷۱- برای تعیین نقطه تلاقی دو تابع f و f^{-1} باید معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ را حل کنیم. اما در دو تیپ از توابع

اگر f و f^{-1} برخوردی داشته باشند، نقطه برخورد آنها روی خط $y = x$ است. در این موارد به جای حل

معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ می‌توانیم معادله $f(x) = x$ را حل کنیم. این دو تیپ تابع عبارتند از:

۱- توابع اکیداً صعودی
۲- توابع هموگرافیک $(f(x) = \frac{ax+b}{cx+d})$

توجه:

۱- اگر تابعی جزو دو تیپ گفته شده نباشد، ممکن است تعدادی از نقاط برخورد f و f^{-1} روی خط $y = x$

نباشند. [مانند $y = -x^3$ که علاوه بر مبدأ، در دو نقطه غیر واقع بر $y = x$ نیز وارون خود را قطع می‌کند].

۲- نقاط برخورد f و f^{-1} همواره نسبت به خط $y = x$ متقارن‌اند. پس اگر تابعی تنها یک نقطه برخورد با

وارون خود داشته باشد، آن نقطه روی خط $y = x$ است و باز هم می‌توان به جای حل معادله $f(x) = f^{-1}(x)$

معادله $f(x) = x$ را حل کرد.

۷۱۱- معکوس ترکیب دو تابع (قانون هنریک آبل):

$$۱) (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = (g \circ f)^{-1}(x)$$

$$۲) (g^{-1} \circ f^{-1})(x) = (f \circ g)^{-1}(x)$$

$$۳) (f^{-1} \circ g^{-1} \circ h^{-1})(x) = (h \circ g \circ f)^{-1}(x)$$

۷۱۱۱- ترکیب تابع با وارونش همواره تابع همانی است:

۱- در $f^{-1} \circ f$ ، چون x ابتدا وارد تابع f می‌شود، پس x باید عضو دامنه f باشد:

$$f^{-1} \circ f(x) = x, x \in D_f$$

۲- در $f \circ f^{-1}$ ، چون x ابتدا وارد تابع f^{-1} می‌شود، پس باید x عضو دامنه f^{-1} باشد:

$$f \circ f^{-1}(x) = x, x \in D_{f^{-1}}$$

دقت کنید علی‌رغم این که ضابطه‌های $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ یکسان است. اما این دو تابع لزوماً برابر نیستند. زیرا یکی از شرط‌های برابری توابع، برابر بودن دامنه‌های توابع است.

۳- اگر $D_f = D_{f^{-1}}$ باشد، دو تابع $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ برابرند. از طرفی $D_{f^{-1}} = R_f$ است، پس اگر در تابع f داشته باشیم $D_f = R_f$ آنگاه $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$ است.

نکته ۱: وارون توابع معروف

f	f^{-1}
$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$	$f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$
$f(x) = a^x$	$f^{-1}(x) = \log_a x$
$f(x) = x^{2n+1}$	$f^{-1}(x) = \sqrt[2n+1]{x}$
$f(x) = x x ; x \neq 0$	$f^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{ x }} ; x \neq 0$
$f(x) = \sqrt[n]{x} ; x \geq 0$	$f^{-1}(x) = x^n ; x \geq 0$

نکته ۲: در تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ اگر $ad \neq bc$ و $a+d=0$ باشد، آنگاه:

$$f^{-1}(x) = f(x)$$

نکته ۳: رفتار تابع $f^{-1}(x)$ از لحاظ صعودی و نزولی بودن دقیقاً مانند رفتار تابع f است.

تست) کدام تابع یک به یک است؟

$y = 2x + |x|$ (۴)
 $y = x - |x|$ (۳)
 $y = x + |x|$ (۲)
 $y = x + |2x|$ (۱)

.....

.....

.....



تست) تابع $f(x) = (x-1)(x-5) + 4x + 1$ در کدام بازه زیر یک به یک است؟

- (۱) $[1, 5]$ (۲) $[0, 5]$ (۳) $[-4, 4]$ (۴) $[-5, 5]$

.....

.....

.....

.....

تست) تابع $y = |2x + a|$ در بازه $(-\infty, 3a+1]$ یک به یک است. بیشترین مقدار صحیح a کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۲

.....

.....

.....

.....

تست) تابع $f(x) = x^2 \sqrt{x^2}$ در یک بازه، نزولی است. ضابطه وارون تابع در این بازه، کدام است؟

(کنکور تیر ۱۴۰۱)

- (۱) $-\sqrt{x^3}, x \leq 0$ (۲) $-\sqrt[3]{x}, x \leq 0$ (۳) $-\sqrt{x^3}, x \geq 0$ (۴) $-\sqrt[3]{x}, x \geq 0$

.....

.....

.....

.....



تست) تابع $f(x) = \sqrt[3]{ax+b}$ از نقطه $(\frac{1}{3}, 1)$ عبور می‌کند. اگر $f^{-1}(8) = 5$ باشد، حاصل $a - b$ چقدر است؟

(تجربی - خارج ۱۴۰۱)

۴) صفر

۳) ۱

۲) ۲

۱) ۲

تست) نمودار تابع $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{2\}$ نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟

(تجربی - خارج ۹۶)

۴) ۱, ۴

۳) ۱, -۴

۲) -۱, ۴

۱) -۱, -۴

تست) تابع $f(x) = x^2 + 2x + 1$ با دامنه $(-1, +\infty)$ مفروض است. نمودارهای دو تابع f , f^{-1} در چند نقطه

(ریاضی - داخل ۹۲)

متقاطعند؟

۴) غیرمتقاطع

۳) ۳

۲) ۱

۱) ۲



تست) فرض کنید M نقطه تلاقی منحنی $y = \sqrt{x+3} - 1$ با تابع وارون خود باشد. فاصله نقطه M از مبدأ مختصات، کدام است؟ (تجربی - خارج ۱۴۰۰)

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۲) $\sqrt{2}$

(۳) ۳

(۴) $2\sqrt{2}$

.....

.....

.....

.....

تست) وارون تابع $y = -3x^3 + 2x - 11$ از کدام نقطه عبور می‌کند؟ (تجربی - خارج ۱۴۰۱)

(۱) $(9, -2)$

(۲) $(2, -31)$

(۳) $(-1, 10)$

(۴) $(-12, -1)$

.....

.....

.....

.....

تست) تابع $f(x) = a + b(\frac{1}{4})^x$ از مبدأ مختصات عبور می‌کند. اگر $f^{-1}(-1) = -1$ باشد، حاصل $a - b$ چقدر است؟ (تجربی - داخل ۱۴۰۱)

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

.....

.....

.....

.....



تست) وارون تابع $f(x) = \sqrt{x-2}\sqrt{mx-1}$ در دامنه محدود، خط $y = 12 - x$ را در نقطه‌ای به عرض ۱۰ قطع می‌کند. مقدار $f(m+4)$ کدام است؟ (ریاضی - داخل ۱۴۰۲)

۲ (۴

۱ (۳

$\frac{1}{4}$ (۲

$\frac{1}{2}$ (۱

تست) قرینه خط به معادله $3y - 2x = 4$ را نسبت به خط $y = x$ خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟ (تجربی - داخل ۹۷)

۲ (۴

۱ (۳

-۱ (۲

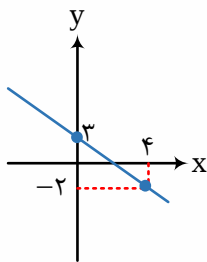
-۲ (۱

تست) تابع با ضابطه $y = \sqrt{(x+1)^2} - |3x-6|$ در یک بازه نزولی است. ضابطه وارون تابع در این بازه کدام است؟ (ریاضی - خارج ۱۴۰۱)

(۱ $-\frac{1}{2}x - 7, x \geq 2$ (۲ $-\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}, x \leq 3$ (۳ $-2x + 14, x \leq 3$ (۴ $-2x - \frac{14}{3}, x \geq 2$



تست) اگر نمودار زیر، مربوط به تابع $y = 3f^{-1}(x-1) + 2$ باشد، در این صورت $f(2)$ کدام است؟



۴) -۵

۳) ۳

۲) $-\frac{5}{4}$ ۱) $\frac{3}{2}$

تست) اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ باشد، حاصل $g(3) + g(15)$ کدام است؟

(تجربی - خارج ۹۹)

۴) ۸

۳) ۱۰

۲) ۱۱

۱) ۱۲

تست) اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = 1 + x - 2\sqrt{x}$, $x \geq 1$ باشد، $(g \circ g)(1)$ کدام است؟ (تجربی - دی ۱۴۰۱)

۴) صفر

۳) ۹

۲) ۴

۱) ۱



(تست) اگر $f(x) = 2 - |x + 1|$ و $g(x) = x + |x|$ باشد، آنگاه دامنه و ضابطه وارون تابع $y = \frac{f}{g}(x)$ کدام است؟

(ریاضی - خارج ۹۷)

$$y = \frac{1}{2x+1}; x > 0 \quad (2)$$

$$y = \frac{2x}{x+1}; x \geq 0 \quad (1)$$

$$y = \frac{2x}{x+1}; x \geq -\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{2x+1}; x > -\frac{1}{2} \quad (3)$$

(تست) اگر $f(x) = \frac{2}{5}x - 4$ و $g(x) = x^3 + x$ باشد، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(8)$ کدام است؟ (تجربی - خارج ۹۸)

$$3 \quad (4)$$

$$2/5 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1/5 \quad (1)$$

(تجربی - ۹۶)

(تست) ضابطه وارون $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$ کدام است؟

$$-x|x| \quad (4)$$

$$x|x| \quad (3)$$

$$x^2 \quad (2)$$

$$-x^2 \quad (1)$$





تست) در دامنه $[0, +\infty)$ ، تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2^x + (\frac{1}{2})^x}{2}$ مفروض است. $f^{-1}(2)$ کدام است؟

(تجربی - داخل ۹۹)

(۱) $\log_2(2 - \sqrt{2})$ (۲) $\log_2(\sqrt{3} - 1)$ (۳) $\log_2(1 + \sqrt{3})$ (۴) $\log_2(2 + \sqrt{3})$

.....

.....

.....

.....

تست) اگر $x \geq 1$ ، $f(x) = x^2 - 2x - 3$ باشد، نمودارهای دو تابع f^{-1} ، $g(x) = \frac{x-9}{2}$ با کدام طول، متقاطع

(تجربی - داخل ۹۸)

هستند؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۱۸ (۴) ۲۱

.....

.....

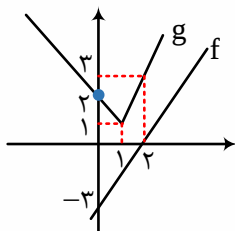
.....

.....



تست) با توجه به نمودارهای f و g در شکل مقابل، حاصل $g \circ f^{-1}(-2) \times g \circ g(0)$ کدام است؟

(تجربی - خارج ۱۴۰۱)



۴) -۶

۳) -۴

۲) ۴

۱) ۶

تست) اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$ و $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$ دو تابع باشند، برد تابع

(ریاضی - خارج ۹۸)

$(g^{-1} \circ f) - f$ کدام است؟

۴) $\{2, -1\}$

۳) $\{3, 4\}$

۲) $\{2, 3\}$

۱) $\{-1, 4\}$

تست) اگر $f = \{(\frac{1}{9}, -1), (\frac{1}{3}, 1), (-\frac{1}{4}, 3), (\frac{1}{4}, -3)\}$ ، $g(x) = -|x|\sqrt{x}$ و $\log^{-1}(a) = -3$ باشد، مقدار a کدام

(کنکور اردیبهشت - ۱۴۰۳)

است؟

۴) $\frac{1}{8}$

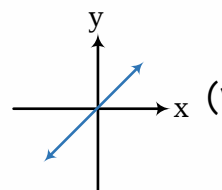
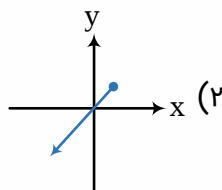
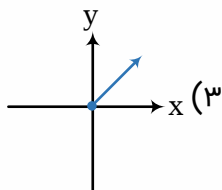
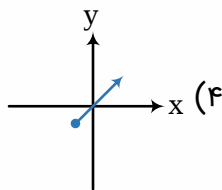
۳) $-\frac{1}{8}$

۲) $\frac{1}{9}$

۱) $-\frac{1}{9}$



تست) اگر $f(x) = \sqrt{x+1}$ ، آنگاه کدام گزینه نمودار تابع $y = (f^{-1} \circ f)(x)$ را نشان می‌دهد؟



.....

.....

.....

.....

تست) اگر $y = \frac{x+2}{4} - \frac{\sqrt{x+1}}{2}$ ضابطه تابع وارون $y = ax + a\sqrt{x}$ باشد، مقدار a کدام است؟

(کنکور اردیبهشت - ۱۴۰۳)

۹ (۴

۴ (۳

۳ (۲

۲ (۱

.....

.....

.....

.....

تست) به ازای کدام مقدار a ، نمودار تابع وارون تابع $f(x) = x^3 + 6x^2 + ax + 1$ خط $10y - x = -10$ را در

(کنکور اردیبهشت - ۱۴۰۳)

نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند؟

۵ (۴

۹ (۳

۱۲ (۲

۱۵ (۱

.....

.....

.....

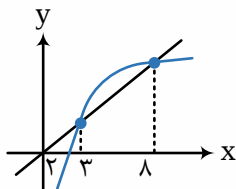
.....



تست) شکل مقابل، نمودار تابع $y=f(x)$ و نیمساز ناحیه اول و سوم است. دامنه تابع با ضابطه

(کنکور ۹۴)

$y = \sqrt{x - f^{-1}(x)}$ کدام است؟



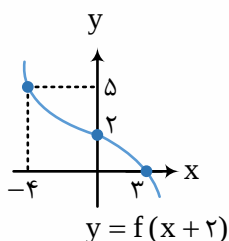
(۴) $[3, 8]$

(۳) $[2, 8]$

(۲) $[2, 3]$

(۱) $[0, 2]$

تست) شکل مقابل، نمودار تابع $y=f(x+2)$ است. حاصل $\frac{f^{-1}(2)+f(5)}{f^{-1}(5)}$ کدام است؟



(۴) -۲

(۳) ۱

(۲) ۲

(۱) -۱





تست) تابع $f(x) = \begin{cases} 2-3x & ; 2x+3 \leq 0 \\ 2+2mx-x^2 & ; 2x+3 > 0 \end{cases}$ روی دامنه تعریف خود، وارون پذیر است، اگر f^{-1} وارون تابع

f به ازای مقدار صحیح m باشد، مقدار $f^{-1}(-19)$ کدام است؟ (تجربی - داخل ۱۴۰۲)

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

.....

.....

.....

.....

تست: اگر $f(x) = 3x + 2|x+1|$ باشد، وارون تابع $f(x)$ کدام است؟

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{5} & ; x \geq -1 \\ x+2 & ; x \leq -1 \end{cases} \quad (۲) \qquad f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{2} & ; x \geq -1 \\ x+2 & ; x < -1 \end{cases} \quad (۱)$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{5} & ; x \geq -3 \\ x+2 & ; x < -3 \end{cases} \quad (۴) \qquad f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{2} & ; x \geq -3 \\ x+2 & ; x < -3 \end{cases} \quad (۳)$$

گزینه (۴)- برد این تابع که $\mathbb{R}$ است و تابع هم اکیداً صعودی است. $f(x)$ یک به یک و در نتیجه وارون پذیر است. ابتدا تابع را بدون قدر مطلق می نویسیم:

$$f(x) = 3x + 2|x+1| = \begin{cases} 3x + 2x + 2 & ; x \geq -1 \\ 3x - 2x - 2 & ; x < -1 \end{cases} = \begin{cases} 5x + 2 & ; x \geq -1 \\ x - 2 & ; x < -1 \end{cases}$$

حال برای نوشتن ضابطه معکوس داریم:

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 2 & ; x \geq -1 \\ x - 2 & ; x < -1 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{5} & ; x \geq -3 \\ x+2 & ; x < -3 \end{cases}$$

خلینو: به کمک عددگذاری داریم:

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = -3 \Rightarrow f^{-1}(-3) = -1$$

در تابع چند ضابطه ای f، نقطه مرزی -۱ را جای گذاری کردیم و به -۳ رسیدیم، پس در ضابطه معکوس -۳ مرز ضابطه ها است. (حذف گزینه های (۱) و (۲)) حال گزینه ای پاسخ است که به ازای $x = -3$ به ما مقدار -۱ را بدهد، یعنی گزینه ۴